Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 28. November 2016

Blatt 6

Ausgabe: 24.11.2016
Abgabe: 1.12.2016

Aufgabe 16 (5 Punkte)**.** *Seien $X, A, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Für die Abbildung*

$$f(X) := (A+X)^p \quad \textit{für } p \in \mathbb{N} \tag{6.1}$$

berechnen Sie $Df(X)H$.

Von den folgenden beiden Aufgaben ist eine eine Bonusaufgabe, ihre Punkte zählen nicht zur erreichbaren Punktezahl hinzu. Die erreichten Punkte beider Aufgaben zählen zu Ihren Gunsten.

Aufgabe 17 (2+3 Punkte)**.** *Nehmen Sie an, daß f, u , v und w differenzierbare Funktionen zwischen euklidischen Räumen sind. Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel*

1. *$\partial h/\partial x$ mit $h(x,y) = f(x, u(x,y))$,*
2. *$\partial h/\partial x$ mit $h(x) = f(x, w(x), v(x))$.*

Aufgabe 18 (2+3 Punkte)**.** *Berechnen Sie für die folgenden Funktionen f und g die Ableitung $D(f\circ g)$. Benutzen Sie die Differenzierbarkeit der beteiligten Funktionen nach Analysis 1.*

1. *$f(u,v) = (\cos(v) + u^2, e^{u+v}), \quad g(x,y) = (e^{x^2}, x - \sin(y))$*
2. *$f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(u+v) + \sin(u+v+w)), \quad g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$*

Aufgabe 19 (1+1+2+4+2 Punkte)**.** *Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, die durch $f(X) = \det X$ definiert ist. Beweisen Sie mithilfe der folgenden Schritte, daß*

$$Df(X)H = \operatorname{Spur}(X^\# H), \quad \textit{für } H \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{6.2}$$

wobei $X^\#$ die zu X adjunkte (transponierte Kofaktor-)Matrix bezeichnet.

Schritt 1. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, beweisen Sie, daß

$$\operatorname{Spur}(A^T B) = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}. \tag{6.3}$$

Schritt 2. Für $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit stetigen partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial X_{ij}}$ gilt

$$Df(X)H = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} H_{ij}. \tag{6.4}$$

Schritt 3. *Nutze die Definitionsformel der Determinante:*

Für $f(X) = \det X$ *sind die partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial f}{\partial X_{ij}}$ *definiert und stetig.*

Schritt 4. *Beweisen sie mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes (des Ausdrucks der Determinante über Kofaktormatrizen), daß*

$$\frac{\partial \det X}{\partial X_{ij}} = (X^{\#})^T_{ij}. \tag{6.5}$$

Schritt 5. *Kombinieren Sie die Schritte 1–4, um* (6.2) *zu beweisen.*