Übungen zur Analysis in mehreren Veränderlichen

Universität Bonn, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Stand: 9. Dezember 2016

Blatt 8

Ausgabe: 8.12.2016
Abgabe: 15.12.2016

Wie angekündigt bringen wir gelegentlich eine kurze (!) Wiederholungsaufgabe.

Aufgabe 24 (4 Punkte). *Betrachten Sie die Folge $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit Grenzwert x^*. Es sei für alle n $x_n \geq 0$. Zeigen Sie, daß $x^* \geq 0$.*

Aufgabe 25 (2+3+2 Punkte). *Lokalisieren Sie die kritischen Punkte der gegebenen Funktionen auf die gegebenen Definitionsbereich und stellen Sie fest, ob es sich um (strikte?) lokale Minima, Maxima oder keins von beiden handelt.*

1. $f(x, y) = xy + 1/x + 8/y$, *auf* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$.
2. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$ *auf* $D = \mathbb{R}^2$.
3. *Untersuchen Sie die Funktion aus 2. im Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -2\}$. Die Ergebnisse im Inneren des Gebiets können Sie übernehmen, zusätzlich müssen Sie die Funktion eingeschränkt auf den Gebietsrand betrachten.*

Aufgabe 26 (4 Punkte). *Eine reelle Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt ungerade, wenn für alle Argumente mit $x, -x \in D$ gilt, daß $f(-x) = -f(x)$.*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, daß

$$\forall b > 0 \ \exists c \in (-b, b) : \quad f'(c) = \frac{f(b)}{b}. \tag{8.1}$$

Aufgabe 27 (3+2 Punkte). *Betrachten Sie den differenzierbaren Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der durch $\gamma(t) = (3t^2/2, t^3)$ definiert ist.*

1. *Berechnen Sie*

$$L(b) = \int_0^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t, \quad b \geq 0, \tag{8.2}$$

2. *die Umkehrfunktion $L^{-1}(s)$ für $s \geq 0$.*