Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 1.

Abgabedatum: **25.10.2016**.

Aufgabe 1. (Rang 1 Matrizen und Eigenwerte)

Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vom Rang 1 lassen sich allgemein durch $A = uv^\intercal$ mit Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ darstellen. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Biorthogonalität)

Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei ferner $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n$ eine beliebige Basis von X und $G = (\langle \phi_i, \phi_j \rangle)_{i,j}$ die zugehörige Gramsche Matrix. Wir definieren die duale Basis zu $\{\phi_i\}$ mittels

$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_n \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \tilde{\phi}_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$.

b) Zeigen Sie, dass $f = \sum_{i=1}^n \langle f, \tilde{\phi}_i \rangle \phi_i = \sum_{i=1}^n \langle f, \phi_i \rangle \tilde{\phi}_i$.

Hinweis: Durch die Eigenschaft a) wird $\tilde{\phi}_i$ auch zur biorthogonalen Basis von ϕ_i.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Konstruktion der biorthogonalen Basis)

Auf $\Pi_3 = \{\text{Polynome vom Grad} \leq 3\}$ wird das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ betrachtet. Bestimmen Sie die zur Monombasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ biorthogonale Basis.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Ausgleichsrechnung)

Berechnen Sie die Best-Approximation bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ der Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = ax^2 + bx + c$ an die folgenden Werte:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	3	-1	3	-2

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Ausgleichsproblem)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines Ausgleichsproblems anhand der folgenden Punkte:

- Generieren Sie eine Datenwolke mit n Datenpunkten auf äquidistanten x-Werten anhand folgender Funktion

  $$y = \pm\sqrt{\frac{r^2 - a(x + \varepsilon_1 - m_x)^2}{b}} + m_y + \varepsilon_2$$

  für $x \in [m_x - \frac{r}{\sqrt{a}} + 0.2, m_x + \frac{r}{\sqrt{a}} - 0.2]$ und folgenden Parametern:

  $$r = 4, \quad m_x = 2, \quad m_y = 1.5, \quad a = 2.4, \quad b = 3.7.$$

  Zur Bestimmung von ε_1 und ε_2 sollen jeweils, d.h. für jedes Datenpaar, gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[-0.1, 0.1]$ verwendet werden. Erstellen Sie Datenwolken für $n = 10, 30, 100$.

- Schreiben Sie ein Programm welches die Parameter c_1, c_2 der Funktion

  $$r^2 = c_1(x - m_x)^2 + c_2(y - m_y)^2$$

  zur Approximation an die generierten Daten im quadratischen Mittel bestimmt.

- Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse, d.h. Datenwolken und Approximation, mittels GnuPlot oder Matlab.

Zur Lösung der entstehenden Gleichungssysteme ist die Benutzung geeigneter Löser aus der AlMa empfohlen.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 28.10.2016 und 31.10.2016. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.