Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 10.

Abgabedatum: **10.01.2017**.

Aufgabe 1. (Blockmatrizen)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

mit $A_{11} \in \mathbb{R}^{j\times j}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $j + k = n$.

a) Es sei λ ein Eigenwert von A_{11} mit zugehörigem Eigenvektor v. Zeigen Sie, dass λ dann auch ein Eigenwert von A ist. Wie sieht der zugehörige Eigenvektor aus?

b) Es sei λ ein Eigenwert von A_{22} mit zugehörigem Eigenvektor w. Zudem sei λ kein Eigenwert von A_{11}. Zeigen Sie, dass es dann einen eindeutigen Vektor $v \in \mathbb{R}^j$ gibt, so dass λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ ist.

c) Sei λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass entweder w ein Eigenvektor von A_{22} zum Eigenwert λ ist oder das v ein Eigenwert von A_{11} zum Eigenwert λ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Vektoriteration)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 \\ 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Desweiteren bezeichnen wir mit $v^{(k)}$ die k-te Iterierte der Vektoriteration zum Startvektor $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren v_1, v_2 von A.

b) Bestimmen Sie $v^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Wieviele Iterationen der Vektoriteration werden benötigt um einen Fehler

$$\frac{\|v^{(k)} - v_1\|_\infty}{\|v_1\|_\infty} < 10^{-6}$$

zu erreichen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Doppelshiftstrategie)

Die verwendung des QR-Algorithmus auf reelle Matrizen mit komplexen Eigenwertpaaren führt unter Verwendung von reellen Shifts zu keiner Konvergenz. Um dies zu vermeiden führt man einen sogenannten Doppelshift τ_k und $\tau_{k+1} = \overline{\tau}_k$ ein. Zeigen Sie, dass $A^{(k+2)}$ reell ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Invarianzeigenschaften des Lanczos-Verfahrens)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Lanczos-Verfahrens für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Das Lanczos-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix $A-\sigma I$ für beliebiges $\sigma \in \mathbb{R}$ bei gleichem Startvektor x_0 stets diesselbe Matrix W_k.

b) Das Lanczos-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix A mit Startvektor x_0 diesselbe Tridiagonalmatrix T_k wie für die Matrix $Q^\intercal AQ$ mit Startvektor $Q^\intercal x_0$, falls Q orthogonal ist.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Lanczos Verfahren)

Schreiben Sie ein C/C++ Programm, welches das Lanczos Verfahren für eine gegebene symmetrische $n \times n$-Matrix im CSR-Format durchführt. Anschließend soll die resultierende $k \times k$-Tridiagonalmatrix T durch zwei Vektoren e und d in einem Format, dass mit MATLAB eingelesen werden kann, gespeichert werden. Diese werden dann in MATLAB oder Octave eingelesen und mit den Befehlen `T=diag(e,-1)+diag(d,1)+diag(e,-1)` und `[E,V] = eig(T)` werden die Eigenwerte und Eigenvektoren von T in Matlab bzw. Octave bestimmt.
Wir wollen mit dem Verfahren die 5 größten Eigenwerte der Matrix aus `FD2.h` für $n = 4^k$ mit $k = 4, 5, 6$ approximieren. Bestimmen Sie diese mittels des Lanczos-Verfahrens für $k = 10, 12, \ldots, 20$ und plotten Sie die Entwicklung der Approximationen an die Eigenwerte.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 23.01.2017 und 25.01.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 16.01.2017–20.01.2017 aus.