# Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

## Aufgabenblatt 11.

Abgabedatum: **17.01.2017**.

**Aufgabe 1.** (Gauß-Laguerre Quadratur)

Die Laguerre-Polynome sind die Orthogonalpolynome bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle v, w \rangle = \int_0^\infty v(x)w(x)e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

Sie sind gegeben über die Rodrigues-Formel

$$\ell_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

und gehorchen der 3-Term-Rekursion

$$(n+1)\ell_{n+1}(x) = (2n+1-x)\ell_n(x) - n\ell_{n-1}(x).$$

Offensichtlich ist der führende Koeffizient des $n$-ten Laguerre-Polynoms gegeben durch $(-1)^n/n!$.

a) Bestimmen Sie die 3-Term-Rekursion der skalierten Laguerre-Polynome mit führendem Koeffizienten 1 und stellen Sie anschließend die zu den Koeffizienten der Rekursion gehörige Tridiagonalmatrix auf.

b) Überlegen Sie sich, wie Sie die Gauß-Laguerre Quadratur, d.h. die Gauß-Quadratur bezüglich des obigen Skalarproduktes, verwenden können um die Normalverteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

zu approximieren.

**Hinweis** Transformieren Sie das Integral zunächst auf $(0,\infty)$ und fügen Sie dann eine geeignete multiplikative 1 ein.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Hermite-Interpolation)

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1([a,b])$ und Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \in [a,b]$. Die Hermite Interpolationsaufgabe lautet dann: Finde ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$, dass die $2n+2$ Bedingungen

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i)$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung der Hermite Interpolationsaufgabe gegeben ist durch

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi(t) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\psi(t)$$

mit

$$\varphi(t) = (1 - 2(\ell_i^x)'(x_i)(t - x_i))(\ell_i^x)^2(t) \quad \text{und} \quad \psi(t) = (t - x_i)(\ell_i^x)^2(t)$$

wobei $\ell_i^x$ das $i$-te Lagrange-Polynom bezüglich der Stützstellen $x = [x_0, \ldots, x_n]$ bezeichnet.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.** (Zusatzaufgabe)
Zeigen Sie die Produktformel von Wallis

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n+1/2}},$$

wobei Sie die Produktentwicklung der Sinusfunktion

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

verwenden dürfen.

**Aufgabe 4.** (Stirling-Formel)
Beweisen Sie für $n \geq 1$ die Abschätzung

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Betrachten Sie zunächst die Folge

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

und zeigen Sie, dass gilt

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n}.$$

b) Verwenden Sie dann für $|x| < 1$ die Potenzreihenentwicklung

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

um zu zeigen, dass für $0 < x < 1$ gilt

$$2x < \log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}(\frac{1}{x^2} - 1)}.$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Aufgabenteils, dass

$$0 < \log \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

und folgern Sie, dass die Folge $a_n$ konvergiert.

d) Setzen Sie $a = \lim_{n\to infty} a_n$ und zeigen Sie, dass

$$1 < \frac{a_n}{a} < \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

gilt.

e) Verwenden Sie die Produktformel von Wallis um zu zeigen, dass $a = \sqrt{2\pi}$ gilt, womit der Beweis der Abschätzung komplettiert ist.

(8 Punkte)

**Programmieraufgabe 1.** (Normalverteilung mit Gauß-Laguerre Quadratur)

In der Programmieraufgabe in dieser Woche wollen wir die Normalverteilungsfunktion über die Gauß-Laguerre Quadratur approximieren mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus Aufgabe 1. Schreiben Sie dafür einen Matlab/Octave-Programm, indem Sie zunächst die zur 3-Term Rekursion der Laguerre Polynome gehörige tridiagonale Koeffizientenmatrix bestimmen. Bestimmen Sie dann mit Hilfe des Matlab Eigenwertlösers `eig` die Stützstellen und Gewichte der Gauß-Laguerre Quadratur und approximieren Sie danach das Integral

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Testen Sie Ihr Programm für $x = 1$ und verwenden Sie $n = 5, 10, \ldots, 50$ Stützstellen für die Quadratur. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit `normcdf(1)` und plotten Sie die Entwicklung des Fehlers. Verwenden Sie für die y-Achse eine logarithmische Skala, der Matlab-Befehl dazu lautet `semilogy`.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 23.01.2017 und 25.01.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 16.01.2017–20.01.2017 aus.

**Bemerkung:**

Wie Ihnen bei der Bearbeitung der letzten Programmieraufgabe aufgefallen ist, weist das Lanczos-Verfahren nur gegen die extremalen Eigenwerte eine vernünftige Konvergenz auf. Es treten sogar doppelte Eigenwerte auf, wo keine doppelten Eigenwerte zu erwarten sind. Das liegt an der Anfälligkeit des Verfahrens gegenüber Rundungsfehlern. Eine genauere Beschreibung der beobachteten Phänomene finden Sie im PDF, dass zu diesem Aufgabenblatt auf der Webseite zur Verfügung gestellt wird. Hierin ist auch beschrieben, wie dieses Problem umschifft werden kann.