Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 12.

Abgabedatum: **24.01.2017**.

Aufgabe 1. (Gauß-Tschebyscheff Quadratur)

Für die Gewichtsfunktion $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ auf $[a, b] = [-1, 1]$ sind die Orthogonalpolynome bekanntlich die Tschebyscheffpolynome

$$p_{n+1}(t) = \cos((n+1)\arccos t).$$

a) Zeigen Sie, dass die $n+1$ Nullstellen von p_{n+1} gegeben sind durch

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

b) Die zugehorigen Gewichte der Gauß-Tschebyscheff Quadratur können dann durch $w_i = \Lambda_{n+1}(x_i)$ berechnet werden, wobei Λ_{n+1} die zugehörige Christoffelfunktion beschreibt. Zeigen Sie, dass gilt

$$w_i = \frac{\pi}{n+1}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauß Quadratur)

Wir wollen das Integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

mit der Gauß-Legendre und der Gauß-Tschebyscheff Quadratur approximieren.

a) Bestimmen Sie die Gauß-Legendre Quadratur für $n = 1, 2, 3$ Stützstellen. Für $n = 1, 2$ können Sie die bekannten Formeln aus der Vorlesung verwenden. Stellen Sie für $n = 3$ die Begleitmatrix der Dreitermrekursion der Legendre-Polynome mit führendem Koeffizienten 1 auf und bestimmen Sie über das Eigenwertproblem Stützstellen und Gewichte.

b) Bestimmen Sie den Wert der Gauß-Legendre Quadratur zur Approximation an das obige Integral für $n = 1, 2, 3$.

c) Bestimmen Sie die Gauß-Tschebyscheff Quadratur für $n = 2$ Stützstellen und ermitteln Sie damit den exakten Wert des Integrals. Hierfür muss natürlich der Integrand zuerst mit $1/w(x)$ multipliziert werden. Bestimmen Sie den Fehler der Gauß-Legendre Quadratur aus Aufgabe a)?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Bereichsintegrale)

Berechnen Sie das Bereichsintegral $\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ wobei B begrenzt wird durch $y = 0, y = x, x = 1$.

b) $f(x,y) = e^{x+y}$ wobei B begrenzt wird durch $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

c) $f(x,y) = xy$ wobei B begrenzt wird durch $y = 0, x = 2, y^2 = 2x$.

d) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ wobei B das durch die Punkte $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,2)$ und $P_3 = (2,2)$ begrenzte Dreieck ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Berechnen von Rotationskörpervolumina)

Wir wollen Rotationskörpervolumina eines Körpers bestimmen. Der Körper entsteht durch Rotation der Fläche, die durch die Geraden $x = a$, $x = b$, die x-Achse und den Graphen der Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ beschränkt ist, um die x-Achse.

a) Zeigen Sie, dass sich das Volumen des Rotationskörpers durch

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

bestimmen lässt. Beschreiben Sie dazu zunächst den Rotationskörper als eine Menge $K \subset \mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie dann das Integral

$$V = \int_K \mathrm{d}(x,y,z)$$

durch Transformation auf Zylinderkoordinaten. Offensichtlich sollte die x-Koordinate diejenige sein, die bei der Transformation unverändert bleibt (üblicherweise ist dies die z-Koordinate).

b) Bestimmen Sie die Funktion f und das Intervall $[a,b]$ so, dass der entstehende Rotationskörper ein Zylinder bzw. Kegel der Höhe h mit Grundflächenradius r ist und leiten Sie so die bekannten Formeln für die Volumina eines Zylinders bzw. Kegels her.

(4 Punkte)