Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 13.

Abgabedatum: **31.01.2017**.

Aufgabe 1. (Exaktheit von Quadraturformeln)

Zeigen sie, dass es keine Quadraturformel $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$ zur Approximation von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gibt, die exakt ist für alle Polynome in $\mathcal{P}_{2n+2}([a,b])$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauß Quadratur auf Dreiecken)

Wir betrachten das Dreieck D, dass gegeben ist durch die Punkte $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,1)$ und $P_3 = (1,0)$. Bestimmen Sie die Gewichte ω_{ij} und die Stützstellen (x_i, y_i) für die 4-Punkte Gauss Quadratur auf D, so dass diese exakt ist für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_3$.

Hinweis. Transformieren Sie das Integral $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x$ mittels der Transformation $x = \xi$, $y = \eta(1-\xi)$ auf das Einheitsquadrat $[0,1]^2$. Verwenden Sie dann die eindimensionale 2-Punkte Gauß-Jacobi Quadratur bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x) = (1-x)$ auf $[0,1]$ und die eindimensionale 2-Punkte Gauss-Legendre Quadratur auf $[0,1]$ und konstruieren Sie damit eine Quadratur auf $[0,1]^2$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die eindimensionale Gauss-Jacobi Quadratur gegeben ist durch die Stützstellen $x_{1,2} = 2/5 \mp \sqrt{6}/10$ und Gewichte $w_{1,2} = 1/4 \pm \sqrt{6}/36$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Bilineare Interpolation und Trapezregel)

Es sei $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dessen Integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

mit der $2D$-Trapezregel $Q_{1,1,V}$ approximiert werden soll.

a) Wie lautet die $2D$-Trapezregel auf $[-1,1]^2$?

b) Bezeichne $p\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ die bilineare Interpolante von f in den Eckpunkten von $[-1,1]^2$. Zeigen sie, dass die bilineare Interpolation die $2D$-Trapezregel liefert, d.h. dass

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = Q_{1,1,V}(f).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Hierarchischer Interpolant)

Gegeben sei die Parabel $f(x) = 1 - 4(x-0.5)^2$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\beta_{\ell,k}$ des hierarchischen Interpolanten

$$f_3(x) = \sum_{\ell=0}^{3} \sum_{k\in\nabla_\ell} \beta_{\ell,k}\phi_{\ell,k}(x)$$

aus dem Raum der stückweise linearen Funktionen

$$S_{2,x} = \{f \in C([0,1])\colon f|_{k/8,(k+1)/8]} \in \mathcal{P}_1 \text{ für alle } k = 0, \ldots, 7\}.$$

(4 Punkte)