Aufgabenblatt 14.

Abgabedatum: **keine Abgabe**.

Aufgabe 1. (Ausgleichsproblem)

Zu den Daten

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	0

bestimme man eine Parabel $p(x) = a + bx + cx^2$ derart, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{4} \big(p(x_i) - y_i\big)^2$$

minimal wird. Lösen Sie dazu die entsprechende Normalengleichung.

Aufgabe 2. (Singulärwertzerlegung)

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0. \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $V \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.

b) Berechnen Sie die Pseudoinverse A^+ von A und bestimmen Sie eine Lösung x des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 = \min$. Ist diese eindeutig bestimmt?

c) Geben Sie den Orthoprojektor auf das Bild von A an.

Aufgabe 3. (QR-Zerlegung)

Bestimme die QR–Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) mit Householder

b) mit Givens Rotationen

c) mit Gram-Schmidt

und bestimme anschließend das Produkt RQ. (Dieses ist der erste Schritt zur iterativen Berechnung der Eigenwerte von A nach dem QR–Verfahren.) Wie berechnet man effizient numerisch die QR-Zerlegung einer pentadiagonalen $n \times n$ Matrix.

Aufgabe 4. (Berechnung von Orthogonalpolynomen)

Gegeben sei die Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = 1 + x^2.$$

Berechnen Sie die Orthogonalpolynome ϕ_i, i-ten Grades $i = 0, \dots, 3$, bezüglich des Innenprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)\, dx.$$

Für gegebenes ϕ betrachten wir die Minimierung von $\langle u - \phi, u - \phi \rangle$ bezüglich aller quadratischen Polynome u. Für welches Polynom dritten Grades ϕ ist u die Nullfunktion?

Aufgabe 5. (Schwache Formulierung)

Wiederholen Sie Aufgabe 1 und 2 von Blatt 6.

Aufgabe 6. (CG-Verfahren)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite und symmetrische Matrix mit maximalem Eigenwert $\lambda_1 = 9$ und minimalem Eigenwert $\lambda_n = 4$.

a) Wie viele Schritte braucht das Cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ höchstens um den Startfehler $\|x^\star - x_0\|_A$ um einen Faktor 10^3 zu reduzieren.

b) Nach höchstens wievielen Schritten findet das Cg-Verfahren bei exakter Arithmetik die Losung $x^\star$?

c) Was ist ein Krylovraumverfahren?

d) Zeigen Sie daß die Suchrichtungen einer 3-Term Rekursion genügen.

Aufgabe 7. (Eigenwerte)

a) Geben Sie eine 3×3 Matrix B an, die die Eigenwerte 2, 4 und -5 besitzt.

b) Diskutieren Sie die Konvergenz der inversen Vektoriteration mit Shift τ in Abhängigkeit von τ für die gewählte Matrix B.

c) Führen Sie 2 Schritte der Vektoriteration mit dem Startvektor $x_0 = [1, 0, -1]^\intercal$ durch.

Aufgabe 8. (Gauss-Quadratur)

Gegeben sei das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

a) Welchen Exaktheitsgrad hat eine Gauß-Quadratur mit 3 Stützstellen?

b) Bestimmen Sie das Ergebnis der Gauß-Quadratur mit 3 Stützstellen um obiges Integral mit $f(x) = e^{-x}$ zu approximieren.

c) Man gebe eine Fehlerabschätzung an.

d) Wie werden die Stützstellen und Gewichte effizient numerisch berechnet.

Aufgabe 9. Zeigen Sie, daß eine Projektionsmatrix P nur reelle Eigenwerte besitzt. Wie lauten diese?

Aufgabe 10. Wie lautet der Satz von Geschgorin? Wenden Sie diesen an, um die Eigenwerte der Matrix $U = [u_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ mit $u_{ij} = q^{|i-j|}$ mit $0 < q < 1$ abzuschätzen.

Aufgabe 11. Gegeben sei das Dreieck D mit den Eckpunkten $(-1,-1)$, $(1,-1)$ und $(0,1)$. Wie konstruieren Sie eine numerische Integrationsformel für

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x,$$

die exakt für alle Polynome sechsten Grades ist, d.h für $f \in \mathcal{P}_6$?