Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 2.

Abgabedatum: **3.11.2016, bis 8:30 Uhr in der VL**.

Aufgabe 1. (Moore-Penrose Inverse)

Sei $A^\dagger$ die Moore-Penrose Inverse von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^\dagger$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger \\ (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger \\ (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A \end{aligned}$$

erfüllt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Orthoprojektor)

a) Gegeben sei $f \in \mathbb{C}^n$ und eine Matrix $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$\langle Pf - f, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in \mathrm{Im}(P).$$

Zeigen Sie, dass P ein Orthoprojektor ist.

b) Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$. Zeigen Sie, dass die Matrix $P = I - vv^\intercal$ ein Orthoprojektor ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (orthogonale Matrizen und Rotationen)

Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

orthogonal ist. Geben Sie ein Beispiel für eine orthogonale 2×2-Matrix an, die nicht von der obigen Gestalt ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. (Pseudoinverse)

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Man berechne

a) die Singulärwertzerlegung $A = V\Sigma U^T$ von A,

b) die Pseudoinverse A^+ von A,

c) den Vektor x^+, der das Residuum $r_x = b - Ax$ in der Euklidnorm minimiert.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (QR-Verfahren)

Schreiben Sie ein Programm zur Bestimmung einer QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{Rang}(A) = n$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Implementieren Sie ein Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt für linear unabhängige Vektoren $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. Das Verfahren lässt sich wie folgt beschreiben:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|_2}, \\
\tilde{q}_i &= a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i, q_j \rangle q_j, \qquad q_i = \frac{\tilde{q}_i}{\|\tilde{q}_i\|_2} \qquad \text{für } i = 2, \dots, n.
\end{aligned}
$$

  Die Vektoren $\{q_1, \dots, q_n\}$ sind dann orthonormal zueinander.

- Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt auf die Spalten von A an und setzen Sie $Q = [q_1, \dots, q_n]^\intercal \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Bestimmen Sie danach die obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $R = Q^\intercal A$.

- Bestimmen Sie nach obigem Verfahren eine QR-Zerlegung der Hilbertmatrix

$$
H_n = \begin{bmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1}
\end{bmatrix}
$$

  für $n = 10, 30, 100$ und testen Sie die Spaltenvektoren von Q auf Orthogonalität. Bilden Sie dafür paarweise die Skalarprodukte und geben Sie das betragsmäßige Maximum aus.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 14.11.2016 und 16.11.2016. Sollten Sie die Aufgabe bereits bis zum ersten Abgabe-Termin gelöst haben, kann diese auch da schon abgegeben werden. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 7.11.2016–11.11.2016 aus.