Aufgabenblatt 3.

Abgabedatum: **8.11.2016**.

Aufgabe 1. (Eindeutigkeit QR-Zerlegung)

Zeigen Sie, dass zwei QR-Zerlegungen bis auf eine unitäre Diagonalmatrix D eindeutig bestimmt sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (QR-Zerlegung)

a) Lösen Sie mit Hilfe von Householder Spiegelungen das Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = (1,1,1)^\mathsf{T}.$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Bestapproximation der Singulärwertzerlegung)

Die Singulärwertzerlegung kann u.a. zur Datenkompression verwendet werden. Dafür ist die folgende Bestapproximationseigenschaft von besonderer Bedeutung.

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A mit

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

und $U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Weiterhin sei $k < r =$Rang(A) und

$$A_k := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T.$$

Vergleichen Sie den Speicheraufwand von A und A_k und zeigen Sie, dass

$$\min_{\operatorname{Rang}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

b) Beweisen Sie, dass für jedes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt

$$\sigma_1 = \max_{0\neq y\in R^m, 0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{y^T A x}{\|y\|_2 \|x\|_2}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Householder Spiegelungen)

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $1 = \|v\|_2^2$ und sei $Q := I - 2vv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die dazugehörige Householder-Transformation.

a) Zeigen Sie, dass Q symmetrisch und orthogonal ist.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante von Q.

(3 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Givens-Rotationen)

a) Schreiben Sie ein C-/C++-Programm, das zu einer gegebenen oberen Hessenbergmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = n$ die Zerlegung $A = QR$ mittels Givens-Rotationen berechnet. Die Matrix Q muss nicht abgespeichert werden, jedoch soll für die Anwendung in Teilaufgabe b) zu einem gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ zusätzlich der Vektor $Q^T b$ bestimmt werden.

b) Verwenden sie Ihr Programm aus a) um das Gleichungssystem $A_n x = b$ für die obere Hessenberg-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und den Vektor $b = [1, \dots, 1]^\intercal \in \mathbb{R}^n$ zu lösen und geben Sie die Lösung für $n = 10$ aus.

c) Führen sie für Ihr Programm aus b) eine Laufzeitanalyse durch indem Sie die Laufzeiten für $n = 50, 100, 150, \dots, 1000$ plotten.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 14.11.2016 und 16.11.2016. Sollten Sie die Aufgabe bereits bis zum ersten Abgabe-Termin gelöst haben, kann diese auch da schon abgegeben werden. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 7.11.2016–11.11.2016 aus.