Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 4.

Abgabedatum: **15.11.2016**.

Aufgabe 1. (Givens-Rotationen)

Gegeben sei ein Vektor $x \in \mathbb{C}^2$ und die aus der Vorlesung bekannte Formel zur Berechnung der Einträge der Givensrotation

$$\begin{aligned}
t &= \frac{x_2}{|x_1|}, \quad n = \sqrt{1+|t|^2}, \quad c = \frac{x_1/|x_1|}{n}, \quad s = \frac{t}{n} \qquad |x_1| \geq |x_2| \\
t &= \frac{x_1}{|x_2|}, \quad n = \sqrt{1+|t|^2}, \quad s = \frac{x_2/|x_2|}{n}, \quad c = \frac{t}{n} \qquad |x_1| < |x_2|.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass c und s in der Form $c = e^{\mathbf{i}\alpha}\cos(\theta)$ und $s = e^{\mathbf{i}\beta}\sin(\theta)$ für geeignete $\alpha, \beta, \theta \in [0, 2\pi)$ dargestellt werden können. Es reicht dafür zu zeigen, dass $|c|^2 + |s|^2 = 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$C_{cs} = \begin{bmatrix} \overline{c} & \overline{s} \\ -s & c \end{bmatrix}$$

unitär ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$C_{cs}x = \|x\|_2 e_1.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (QR-Zerlegung von Hessenberg Matrizen)

Lösen Sie mit Hilfe von Givens-Rotationen das Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = (2,2,2,2)^{\intercal}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Gram-Schmidt Orthogonalisierung von Polynomen)

Gegeben sei die Monombasis $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ des Polynomraumes $\Pi_4([-1,1])$ auf dem Intervall $(-1,1)$. Bestimmen Sie die bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ orthogonale Basis mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Orthogonalität von Legendre-Polynomen)

Die Legendre-Polynome wurden in der Vorlesung als Spezialfall der Jacobi-Polynome definiert und genügen der *Rodrigues-Formel*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n.$$

Zeigen Sie, dass diese Polynome orthogonal sind bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis Verwenden Sie partielle Integration und zeigen Sie zunächst, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} (x^2 - 1)^n \Big|_{\pm 1} = 0, \quad \text{für } k < n.$$

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Kompression mittels SVD)

Die Singulärwertzerlegung kann u.a. zur Datenkompression verwendet werden. In der Programmieraufgabe diese Woche wird diese Datenkompression anhand von Bilddateien veranschaulicht. Dazu verwenden wir das auf der Vorlesungsseite zur Verfügung gestellte MATLAB-Skript `svdbild.m`. In diesem Skript wird eine Bilddatei mit dem Befehl `imread` eingelesen. Danach werden die Singulärwertzerlegungen der RGB-Komponenten des Bildes durchgeführt und die Kompression des Bildes wird durch Abschneiden dieser Zerlegungen nach k Singulärwerten bestimmt. Danach werden die abgeschnittenen Singulärwertzerlegung in das Bildformat zurücktransformiert und die entstehende Bilddatei wird mit dem Befehl `imwrite` gespeichert.

a) Führen Sie eine Bildkompression mit $k = 50, 100, 150$ durch.

b) Bestimmen Sie die Anzahl benötigter double-Werte um die RGB-Komponenten zu speichern für die unkomprimierte und die komprimierte Version.

Es werden auf der Homepage Beispieldateien zur Verfügung gestellt, die Sie mit Hilfe des MATLAB-Skripts einlesen können. Alternativ können Sie das Skript auch an eigenen Bilddateien testen.

Hinweis. Die Rücktransformation in das Bildformat mit `imwrite` ist nicht auf abgeschnittene Singulärwertzerlegungen ausgelegt, sondern es ist notwendig die abgeschnittenen Singulärwertzerlegungen explizit auszurechnen. Dies geschieht im MATLAB-Skript `svdbild.m` bei der Bestimmung der Matrizen `Ak1`, `Ak2` und `Ak3` wodurch der Gewinn der Kompression natürlich verloren geht. In Aufgabenteil b) soll natürlich nur die Anzahl an double-Werten aus denen sich die Matrizen `Ak1`, `Ak2` und `Ak3` reproduzieren lassen berücksichtigt werden.

Bemerkung. Die in der Praxis eigesetzten Verfahren zur Bildkompression sind in der Regel auf das verwendete Format der Bilddatei zugeschnitten. Hierbei wird die Singulärwertzerlegung kaum eingesetzt, sie dient hier also nur als illustratives Beispiel. Dennoch ist die Singulärwertzerlegung in anderen Bereichen der Datenkompression ein unverzichtbares Werkzeug.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 14.11.2016 und 16.11.2016. Sollten Sie die Aufgabe bereits bis zum ersten Abgabe-Termin gelöst haben, kann diese auch da schon abgegeben werden. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 7.11.2016–11.11.2016 aus.