# Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

## Aufgabenblatt 5.

Abgabedatum: **22.11.2016**.

**Aufgabe 1.** (Hermite–Polynome)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *Hermite–Polynome* durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) Die Hermite–Polynome genügen für $n \in \mathbb{N}$ der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

mit $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. (Damit ist klar, dass $H_n$ ein Polynom vom Grad $n$ ist.)

**Hinweis.** Verwenden Sie die Produktregel für die $n$-te Ableitung,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

b) Für die Ableitung von $H_n$ gilt $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

c) Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

sind die Orthonormalpolynome zum Gewicht $\omega(x) = e^{-x^2}$ auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$.

**Hinweis.** Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Drei-Term Rekursion)

Es seien $p_j(x) \in \mathcal{P}_{j,1}$, $j = 0, \ldots, n$, eine Familie orthogonaler Polynome bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

mit führendem Koeffizienten 1. Zeigen Sie, dass die Orthonormalpolynome

$$q_j(x) = \frac{p_j(x)}{\sqrt{\langle p_j, p_j \rangle_\omega}}$$

der Drei-Term Rekursion

$$\beta_j q_j(x) = (x - \alpha_{j-1}) q_{j-1}(x) - \beta_{j-1} q_{j-2}(x)$$

mit

$$\alpha_j = \frac{\langle x p_j, p_j \rangle_\omega}{\langle p_j, p_j \rangle_\omega}, \qquad \beta_j = \frac{\langle p_j, p_j \rangle_\omega}{\langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle_\omega}$$

genügen.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.** (Fourierreihen)

Abgebrochene Fourierreihen werden verwendet um $2\pi$-periodische Funktionen $f$ zu approximieren. Diese haben die Form

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1/\sqrt{2\pi}, \cos kx/\sqrt{\pi}, \sin kx/\sqrt{\pi}\}$ für $k = 1, \dots, n$ orthonormal sind bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der $2\pi$-periodischen Sägezahnfunktion, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x \in \{-\pi, \pi\}. \end{cases}$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 4.** (Laplace in Polarkoordinaten)

Gegeben sei das Poisson-Problem auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{aligned} -\Delta u = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial^2}{\partial y^2}u &= 1, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass der zweidimensionale Laplace-Operator in Polarkoordinaten $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

(4 Punkte)

**Programmieraufgabe 1.** (Auswertung von Orthogonalpolynomen)

Schreiben Sie ein C/C++ Programm das mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Drei-Term Rekursion folgende Polynome an der Stützstelle $x_n$ auswertet

a) Hermite-Polynome auf $(-5,5)$ mit $H_{-1} \equiv 0,\ H_0 \equiv 1$ und der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

b) Jacobi-Polynome mit wählbaren $\alpha$ und $\beta$ auf $(-1,1)$ sowie den Polynomen $P_0^{(\alpha,\beta)} \equiv 1$ und $P_1^{(\alpha,\beta)} = 1/2(\alpha - \beta + (\alpha+\beta+2)x)$. Die Rekursionsformel für $n \geq 1$ lautet dann

$$a_n^1 P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (a_n^2 + a_n^3 x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - a_n^4 P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

mit

$$\begin{aligned}
a_n^1 &= 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) \\
a_n^2 &= (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2) \\
a_n^1 &= (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2) \\
a_n^1 &= 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2).
\end{aligned}$$

c) Laguerre-Polynome auf $(0.1, 100)$ mit $L_{-1} \equiv 0,\ L_0 \equiv 1$ und der Rekursionsformel

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse indem Sie die Auswertungen für $n = 2^k,\ k = 1,\ldots,6$ auf dem Intervall $(a,b)$ an 500 äquidistanten Stützstellen plotten. Im Falle der Jacobi-Polynome sollen als Beispiele Legendre-Polynome $\alpha = \beta = 0$ und Tschebyscheff-Polynome $\alpha = \beta = -0.5$ verwendet werden.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 28.11.2016 und 30.11.2016. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 21.11.2016–25.11.2016 -aus.