Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 6.

Abgabedatum: **29.11.2016**.

Aufgabe 1. (Schwache Formulierung)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right) + c(x)u(x) = f(x)$$

auf dem Intervall $\Omega = (0,1)$ zu verschiedenen Randbedingungen. Bestimmen Sie die schwache Formulierung zu

a) inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta.$$

Hinweis. Machen Sie den Ansatz $u(x) = u_1(x) + u_0(x)$ wobei $u_1(x) \in \mathbb{V}$ mit $u_1(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ und $u_0 \in \mathbb{V}_0$ liegt. Die Funktion u_1 lässt sich z.B. durch $u_1(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$ bestimmen. Testen Sie danach Ihre Gleichung in $\mathbb{V}_0$ um u_0 zu bestimmen. Die schwache Formulierung zeigt, dass sich dieser Fall auf den homogener Dirichlet-Randbedingungen mit veränderter rechter Seite zurückführen lässt.

b) Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = \alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = \beta.$$

Hinweis. Beachten Sie, dass Sie in diesem Fall $\mathbb{V}$ als Testraum verwenden müssen und somit die Randterme beim partiellen Integrieren nicht verschwinden. Als Ergebnis erhalten Sie

$$\int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \beta a(1)v(1) - \alpha a(0)v(0).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (System- und Massenmatrix)

Gegeben sei die Differentialgleichung aus Aufgabe 1 mit konstanten Koeffizienten $a(x) \equiv 2$ und $c(x) \equiv 1$. Desweiteren bezeichne $\Phi = [\phi_0, \ldots, \phi_n]$ die Basis des Raumes der stückweise linearen Splines auf $[0,1]$ bezüglich äquidistanter Stützstellen $x_i = ih$, für $i = 0, \ldots, n$ und $h = 1/n$. Die Randsplines sind hierbei definiert als

$$\phi_0 = \begin{cases} n(x_1 - x) & x \in [0,h), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \phi_n = \begin{cases} n(x - x_{n-1}) & x \in (x_{n-1}, 1], \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Stellen Sie für $f(x) = 1$ das aus der Galerkin-Diskretisierung bezüglich der Basis Φ resultierende Gleichungssystem auf für die Neumann-Randbedingungen $u'(0) = -1$ und $u'(1) = 1$.

Bemerkung. Das resultierende Gleichungssystem hat die Form

$$(A + M)u = f + g,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ *System-* oder *Steifigkeitsmatrix* und $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ *Massenmatrix* genannt wird. Zudem sind $f, g \in \mathbb{R}^{n+1}$ Vektoren und f wird *Lastvektor* genannt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (CG-Verfahren)

Beweisen Sie Lemma 2.1 aus der Vorlesung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und x^* die exakte Lösung, also $Ax^* = b$.

a) Für das durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$$

definierte Funktional Φ gilt

$$\Phi(x^*) - \Phi(x) = \frac{1}{2}\langle x - x^*, x - x^*\rangle_A,$$

d.h. das Funktional besitzt ein eindeutig bestimmtes Minimum bei $x = x^*$.

b) Es seien $y \in \mathbb{R}^n$ und der Teilraum $M \subset \mathbb{R}^m$ gegeben sowie $y + M = \{y + v, v \in M\}$ eine affine Mannigfaltigkeit. Für $x \in y + M$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a)

$$x = \operatorname*{argmin}_{v \in y+M} \Phi(v).$$

(b)

$$\langle x - x^*, z\rangle_A = 0 \quad \forall z \in M.$$

(c)

$$\|x - x^*\|_A < \|v - x^*\|_A \quad \forall v \in y + M,\ z \neq x.$$

c) Es gilt

$$\operatorname{grad} \Phi(x) = Ax - b.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Suchrichtung des CG-Verfahrens)

Zeigen Sie, dass die neue Suchrichtung im Cg-Verfahren

$$q^{(k+1)} = \beta_k q^{(k)} - r^{(k+1)}$$

nicht verschwindet, d.h. $q^{(k+1)} \neq 0$ falls $x^{(k+1)} \neq x^*$ gilt.

(3 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (CG-Verfahren)

Schreiben Sie ein C/C++ Programm, das das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten CG-Verfahrens nach Hestenes und Stiefel löst. Hierbei ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite und dünnbesetzte Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Dabei soll die Matrix A im CSR-Format abgespeichert werden. Für die benötigten Rechenoperationen können Sie die in `vector.h` zur Verfügung gestellten Routinen verwenden. Das Verfahren soll abgebrochen werden, falls die euklidische Norm des Residuums $\varepsilon = 10^{-9}$ unterschreitet. Testen Sie das Verfahren anhand der Tridiagonalmatrix A_n und der rechten Seite b_n

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix}$$

für $n = 2^k$ und $k = 2, 4, \ldots, 16$. Geben Sie jeweils die Anzahl benötigter Iterationen des CG-Verfahrens aus.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 12.12.2016 und 14.12.2016. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 05.12.2016–09.12.2016 aus.