Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 7.

Abgabedatum: **06.12.2016**.

Aufgabe 1. (Tschebyscheff-Polynom)

Es seien $0 < \lambda_1 < \lambda_n$ positive reelle Zahlen und $g\colon [\lambda_1, \lambda_n] \to [-1, 1]$ die affin lineare Abbildung, die gegeben ist durch

$$g(\lambda) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n - 2\lambda}{\lambda_n - \lambda_1}.$$

Desweiteren betrachten wir die Tschebyscheff-Polynome

$$T_k(t) = \begin{cases} \cos(k \arccos(t)) & |t| \leq 1, \\ \frac{1}{2}\left((t + \sqrt{t^2 - 1})^k + (t + \sqrt{t^2 - 1})^{-k}\right) & |t| > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$|T_k(g(0))| \geq \frac{1}{2}\eta^k \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{(\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_1})}{(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1})}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Verallgemeinertes Eigenwertproblem)

Gegeben sei eine symmetrische und positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir betrachten das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda Cx.$$

a) Sei $C = LL^\intercal$ die Cholesky-Zerlegung von C. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $H = L^{-1}AL^{-\intercal}$ mit den Eigenwerten des verallgemeinerten Eigenwertproblems übereinstimmen.

b) Zeigen Sie, dass H nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit orthogonalen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ besitzt.

c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren des verallgemeinerten Eigenwertproblems und zeigen Sie, dass diese orthogonal bezüglich des Skalarproduktes $\langle v, w \rangle_C = \langle Cv, w \rangle$ sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenwerte)

Gegeben sei eine symmetrische und positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiterhin sollen die Eigenwerte des verallgemeinerten Eigenwertproblems $Ax = \lambda Cx$ im Intervall $[\lambda_1, \lambda_n]$ liegen. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lambda_1 \langle Cv, v \rangle \leq \langle Av, v \rangle \leq \lambda_n \langle Cv, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (CG-Verfahren)

Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Gleichungssystem $Ax = b$ mit exakter Lösung x^*.

a) Die Matrix A habe genau k verschiedene Eigenwerte. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren nach spätestens k Schritten konvergiert.

b) Sei b ein Eigenvektor von A. Wieviele Schritte braucht das CG-Verfahren um die exakte Lösung x^* zu finden. (Beweis)

c) Sei A nur noch positiv semidefinit mit $\ker(A) = \operatorname{span}\{v_0\}$ und $b \in \operatorname{im}(A)$. Wie lässt sich das CG-Verfahren modifizieren, so dass es dennoch konvergiert?

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Dünnbesetzte Gleichungssysteme)

a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right) + u(x) = 1 \qquad \text{auf } \Omega = (0,1),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Diskretisieren Sie die Gleichung mit dem Galerkinverfahren im Raum der stückweise linearen Splines auf $[0,1]$ bezüglich äquidistanter Stützstellen $x_i = ih$, für $i = 1, \dots, n-1$ und $h = 1/n$. Stellen Sie die Steifigkeits- und Massenmatrix im CSR-Format sowie den Lastvektor auf und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem anschließend mit Hilfe des CG-Verfahrens. Visualisieren Sie die Lösung u_h für $n = 10, 50, 500$ indem Sie die Funktion u_h sowohl in den Stützstellen als auch in den Zwischenstellen $(i + \frac{1}{2})h$ für $i = 0, \dots, n-1$ auswerten.

b) In der Vorlesung Alma 1 haben wir eine Finite Differenzen Diskretisierung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung und die Differenzen-Matrix im CSR-Format aufgestellt. Diese Differenzen-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist auf der Webseite in `FD2.h` zur Verfügung gestellt. Verwenden Sie diese Matrix um das Gleichungssystem $Ax = b$ für einen Zufallsvektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit dem CG-Verfahren zu lösen. Führen Sie eine Laufzeitanalyse für $n = 4^k$ mit $k = 4, \dots, 9$ durch.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 12.12.2016 und 14.12.2016. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 05.12.2016–09.12.2016 aus.