Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 8.

Abgabedatum: **13.12.2016**.

Aufgabe 1. (CG-Verfahren)

Gegeben sei eine symmetrische und positiv definite Matrix symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit größtem Eigenwert $\lambda_{\text{max}} = 4$ und kleinstem Eigenwert $\lambda_{\text{min}} = 1$. Bestimmen Sie die Anzahl an Iterationen, die das CG-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ benötigt um eine relative Genauigkeit von 10^{-6} zu erzielen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Eigenwerte tridiagonaler Matrizen)

Es sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass für $k = 1, \dots, n$ die Eigenwerte λ_k von $\mathbf{D}$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\mathrm{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

und die Einträge $[v_k]_\ell$ für $\ell = 1, \dots, n$ der zughörigen Eigenvektoren

$$[v_k]_\ell = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} \sin\left(\frac{k\ell\pi}{n+1}\right)$$

erfüllen.
Man benutze dieses Ergebnis, um die Kondition der Systemmatrix $\kappa_2(A)$ des diskretisierten Laplace-Operators auf dem Intervall zu bestimmen. Dies bedeutet, für $\alpha = 2$ und $\beta = \gamma = -1$ soll der Quotient $\lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{min}}$ untersucht werden.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenwerte zu disjunkten Gerschgorinkreisen)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Es sei ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist.

b) Für A sei bekannt, dass die Gerschgorinkreise K_i für $i = 1 \dots, n$ disjunkt sind. Zeigen Sie, dass dann alle Eigenwerte reell sind.

Hinweis. Verwenden Sie die Zusatzaufgabe.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Gerschgorin-Kreise)

Betrachten Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}, |\varepsilon| < 1.$$

a) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix und zeigen Sie, dass $|\lambda_3 - 1| \leq \varepsilon$.

b) Verwenden Sie eine geeignete Ähnlichkeitstransformation um zu zeigen, dass sogar $|\lambda_3 - 1| \leq \varepsilon^2$ gilt.

Hinweis. Verwenden Sie die Zusatzaufgabe.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es sei bekannt, dass für $k < n$ die Vereinigungen $K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$ und $\tilde{K} = \bigcup_{i=k+1}^{n} K_i$ der Gerschgorinkreise K_i von A disjunkt sind. Zeigen Sie, dass dann in K genau k Eigenwerte und in $\tilde{K}$ genau $n-k$ Eigenwerte von A liegen.

Programmieraufgabe 1. (Vektoriteration)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm, welches zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Eigenpaar zum betragsgrößten Eigenwert mittels der Vektoriteration bestimmt. Die Matrix A soll hierbei im CSR-Format gespeichert werden. Testen Sie Ihr Programm anhand der Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $n = 2^k$ und $k = 1, \dots, 10$. Zur Ermittlung eines Abbruchkriteriums bestimmen wir in jedem Schritt den *Rayleigh-Quotienten*

$$\lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)\intercal} A v^{(k)}}{v^{(k)\intercal} v^{(k)}}$$

als Approximation an den größten Eigenwert und bestimmen die euklidische Norm $\|Av^{(k)} - \lambda_k v^{(k)}\|_2$. Falls diese die Toleranz eps $= 10^{-6}$ unterschritten hat, stoppen wir den Algorithmus. Natürlich soll das Matrix-Vektor Produkt $Av^{(k)}$ in jedem Schritt nur einmal berechnet werden. Geben Sie die Anzahl Iterationen an, die der Algorithmus benötigt.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 09.01.2017 und 11.01.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 19.12.2016–23.12.2016 aus.

Korrektur zur Programmieraufgabe von Blatt6: Das CG-Verfahren benötigt zur Berechnung der Lösung des Gleichungssystem auf Blatt 6 n Schritte und daher ist der Aufwand für $k = 16$ sehr hoch. Verwenden Sie daher als maximales k nur $k = 12$ und geben Sie neben der Anzahl an Iterationen noch die Norm des letzten Residuums aus.