Einführung in die numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 9.

Abgabedatum: **20.12.2016**.

Aufgabe 1. (Householder Deflation)

Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Vektoriteration sei der betragsmäßig größte Eigenwert λ_1 und ein zugehöriger Eigenvektor v_1 bestimmt worden.

a) Finde einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q_v e_1 = \alpha v_1$ für die zugehörige Householder-Matrix Q_v und ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Zeige, dass A durch

$$Q_v^\intercal A Q_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^\intercal \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

auf Blockstruktur transformiert werden kann, wobei $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ sind.

c) Zeige, dass die Matrix A_1 die Eigenwerte $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ besitzt.

Damit kann die Vektoriteration auf die kleinere Matrix A_1 angewendet werden, um den nächsten Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor zu berechnen. Dieses als *Householder-Deflation* bekannte Verfahren kann iteriert werden, um alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren zu bestimmen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Cauchy's interlacing Theorem)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Desweiteren sei $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ eine symmetrische Matrix die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Die Eigenwerte von B bezeichnen wir mit $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass sich B schreiben lässt als $B = P^\intercal A P$ mit einer geeigneten Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ und verwenden Sie danach den Satz von Courant-Fischer.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Begleitmatrix)

Gegeben sei die *Begleitmatrix*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Vektoriteration)

Wir wenden nun die Vektoriteration explizit auf die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$$

an.

a) Bestimmen Sie die Iterierten $v^{(k)}$ der Vektoriteration zum Startvektor $v^{(0)} = [10]^\intercal$ und die zugehörige Approximation $\lambda^{(k)}$ an den größten Eigenwert λ_1 von A. Brechen Sie Ihre Berechnungen ab, wenn Sie die Lösung auf 4 Dezimalstellen Genauigkeit bestimmt haben.

b) Bestimmen Sie die Konvergenzrate für dieses Beispiel, indem sie das Eigenwertproblem exakt lösen und die Quotienten

$$\frac{\|v^{(k+1)} - v_1\|}{\|v^{(k)} - v_1\|}$$

bestimmen wobei v_1 den exakten Eigenvektor zu λ_1 bezeichne. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der theoretisch erwarteten Konvergenzrate λ_1/λ_2.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Inverse Vektoriteration)

Schreiben Sie ein C/C++-Programm, welches zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Eigenpaar zum betragskleinsten Eigenwert mittels der inversen Vektoriteration bestimmt. Die Matrix A soll hierbei im CSR-Format gespeichert werden. Testen Sie Ihr Programm anhand der Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $n = 2^k$ und $k = 1, \ldots, 9$. Zur Ermittlung eines Abbruchkriteriums bestimmen wir in jedem Schritt den *Rayleigh-Quotienten*

$$\lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)\intercal} A^{-1} v^{(k)}}{v^{(k)\intercal} v^{(k)}}$$

als Approximation an den größten Eigenwert von A^{-1}und bestimmen die euklidische Norm $\|A^{-1}v^{(k)} - \lambda_k v^{(k)}\|_2$. Falls diese die Toleranz eps $= 10^{-6}$ unterschritten hat, stoppen wir den Algorithmus. Zur Lösung des Gleichungssystems $Az^{(k)} = v^{(k-1)}$ soll das CG-Verfahren verwendet werden. Geben Sie sowohl den kleinsten Eigenwert und als auch die Anzahl Iterationen, die die inverse Vektoriteration benötigt, an. Wie erklären Sie sich die wesentlich kleinere Anzahl an Iterationen für B_n?

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 09.01.2017 und 11.01.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 19.12.2016–23.12.2016 aus.