

# Wiederholungsthemen für Einführung in die Grundlagen der Numerik

1. Berechnung der Bestapproximation in einem Raum mit Skalarprodukt (mit/ohne) Verwendung orthogonaler Basen.
2. Berechnung der kleinsten Quadrate Lösung  $x$  von  $Ax = b$ 
  - (a) mittels Singulärwertzerlegung, Moore-Penrose-Inverse, Orthoprojektion
  - (b) mittels  $QR$ -Zerlegung
3. Methoden zur numerischen Berechnung der  $QR$ -Zerlegung/ Methode der kleinsten Quadrate und ihr Aufwand (bei speziellen Matrizen)
4. Beweis einfacher Beziehungen bei orthogonalen Polynomen mittels Drei-Term-Rekursion, partieller Integration bzw. der Orthogonalitätsbeziehungen, z.B. für welche  $n, m$  gilt

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)p_n^{(1,1)}(x)p_m^{(0,0)}(x) dx = 0?$$

5. Herleitung der schwachen Formulierung bei einer konkreten Randwertaufgabe in 1D und Berechnung der Finite-Elemente-Lösung bei stückweise linearen Ansatzfunktionen.
6. Beweis einfacher Beziehungen beim  $CG$  und  $PCG$ -Verfahren, z.B.
  - (a) Herleitung der Formeln für die  $\alpha_k$  und  $\beta_k$ ,
  - (b) Verwendung verschiedener Orthogonalitätsbeziehungen zum Beweis von Dreitermrekursionen
  - (c) Bezug zu den Krylow-Unterräumen
  - (d) Konvergenzeigenschaften anhand konkreter Beispiele
7. Arnoldi-Prozeß
8. Eigenwertprobleme: Mathematische Grundlagen (Schursche Normalform, Blockmatrizen, Satz von Gerschgorin mit Anwendungen, Rayleigh-Quotient, Wertebereich einer Matrix)
9. Konvergenzeigenschaften der Vektoriteration und inversen Vektoriteration und Einfluß der Wahl von Shift-Parametern anhand einer Beispielmatrix
10.  $QR$ -Verfahren: Algorithmus, Konvergenzeigenschaften, Beschleunigung durch Transformation auf Hessenberggestalt, Berechnung einer Trafo auf Hessenberggestalt und eines  $QR$ -Schrittes anhand eines Beispiels und allgemein
11. Lanczos-Verfahren, Bezug zu den Krylow-Unterraumverfahren
12. Gauß-Quadratur 1D: (Exaktheit, Wahl der Stützstellen und Gewichte und deren numerische Berechnung, Fehlerabschätzungen und Berechnung der Quadratur für Beispiele)

13. Mehrdimensionale Quadratur: Integration auf Vierecken und Würfeln, Duffy-Trick
14. Hochdimensionale Quadratur: Monte-Carlo Methoden, Fehlerabschätzungen, Hierarchische Basen und Dünne Gitter
15. Zusammenhänge zwischen den einzelnen Themen (z.B. Nullstellen von Orthogonalpolynomen, Eigenwerte und Gauß-Quadratur, SVD und Bestapproximation)
16. Komplexität der Algorithmen