A posteriori Finite Elemente Fehlerkontrolle für den p-Laplace mit gradient recovery

Jessica Jung, 26.01.2017

1 Einleitung

$$\textbf{(P)} \qquad -\,div(|\nabla u_h|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega$$
$$u = f \quad \text{auf } \partial\Omega$$

(WP) Suche u $\in H_0^{1,p}(\Omega)$ sodass $a(u,v) = (f,v)$ für alle $v \in H_0^{1,p}(\Omega)$

$$\text{mit } a(u,v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx$$

2 Vorbereitungen

Lemma 2.1. *Sei $K \in T_h$ und $v \in P_k$. Dann gilt:*

$$h_K \int_{\partial K} (|\nabla u_h| + |v|)^{p-2}|\nabla v|^2 dx \leq C \int_K (|\nabla u_h| + |v|)^{p-2}|\nabla v|^2 dx$$

Lemma 2.2. *Für alle $a, \xi, \eta \geq 0, \theta > 0$, gilt dass*

$$(a+\xi)^{p-2}\xi\eta \leq \theta^{-\gamma}(a+\xi)^{p-2}\xi^2 + \theta(a+\eta)^{p-2}\eta^2 \tag{2.1}$$

wobei

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } 1 < p \leq 2, \theta \in [1,\infty) \textit{ oder } 2 < p < \infty, \theta \in (0,1) \\ \frac{1}{p-1} & \textit{wenn 1 } < p \leq 2, \theta \in (0,1) \textit{ oder } 2 < p < \infty, \theta \in [0,\infty) \end{cases}$$

Für alle $a, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ gilt:

$$\xi\eta \leq \delta^{-\beta}(a+\xi)^{p'-2}\xi^2 + \delta(a+\eta)^{p-2}\eta^2 \tag{2.2}$$

Für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(a+|\xi+\eta|)^{p-2}|\xi+\eta|^2 \leq (a+|\xi|)^{p-2}|\xi|^2 + (a+|\eta|)^{p-2}|\eta|^2 \tag{2.3}$$

Definition 2.3 (Quasi-Norm)**.** v,w $\in H_0^{1,p}(\Omega)$

$$|v|^2_{(w,p)} := \int_\Omega |\nabla v|^2(|\nabla w| + |\nabla v|)^{p-2} dx$$

3 Resultate der Approximation durch Quasi-Norm

Definition 3.1. Für$x, y \geq 0$, $1 < p < \infty$,

$$G(x,y) := \begin{cases} y^2(x+y)^{p-2} & \text{wenn x + y} > 0 \\ 0 & \text{wenn x = y = 0} \end{cases}$$

Lemma 3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*, nicht leer, konvex, beschränkt und $\partial\Omega$ lipschitz. Sei*$1 < p < \infty, f \in (H^{1,p}(\Omega))^*$ *mit $R \cap ker(f)$ =0, wobei R der Raum aller auf Ω konstanten Funktionen. Dann existiert eine Konstante $c_1 = c(f,p,\Omega)$ sodass für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $v \in H^{1,p}(\Omega)$*

$$\int_\Omega G(a,|v|)dx \leq c_1 G(a,|f(x)|) + c_1 \int_\Omega G(a,|v|)dx$$

Definition 3.3 (Interpolation auf $V_{h,0}$). Sei D die Menge der Knoten, Λ die Menge der inneren Knoten und φ_z nodale Basisfunktion von z in $V_{h,0}$, setze $\omega_z = \{x \in \Omega : \varphi_z(x) > 0\}$,

$$\psi_z = \frac{\varphi_z}{\psi} \text{ mit } \psi = \sum_{z\in\Lambda} \varphi_z$$

Dann definiere für alle $v \in H_0^{1,p}$ die Interpolation durch

$$\pi v = \sum_{z\in\Lambda} v_z \varphi_z \in V_{h,0}, \quad v_z = \frac{\int_\Omega \psi_z v dx}{\int_\Omega \varphi_z}.$$

Lemma 3.4. *Für 1<p<∞ n,d∈ $\mathbb{N}$ existiert $c_2 = c(p,d,n)$, sodass für alle $a_1,...a_n \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} G(|a_j|\,,|a_j-a_k|) \le c_2 \sum_{l=1}^{n-1} \min_{m=1,..,n} G(|a_m|, |a_{l+1}-a_l|)$$

Lemma 3.5. *Sei π wie in Definition (3.3), 1 < p < ∞, $u_h \in V_h$, $v \in H_0^{1,p}(\Omega), K \in T_h$. Sei $T_z = \{K \in T_h | K \subset \bar{\omega_z}\}$ und $\bigcup \varepsilon_z = \bigcup\{\partial K | K \in T_z\}$. Dann gilt:*

$$\int_K G(|\nabla u_h|, |v-\pi v|/h_K)dx + \int_K G(|\nabla u_h|, |\nabla(v-\pi v)|)dx$$
$$\le \sum_{z\in\Lambda\cap K} \left(\int_{\omega_z} G(|\nabla u_h|, |\nabla v|)dx + \min_{T\in T_z} \int_{\cup\varepsilon_z} G(|\nabla u_h|_T|, |\,[\partial_n u_h]_\varepsilon\,|)ds\right)$$

Lemma 3.6. *Für $\delta > 0$, 1 < p,p' < ∞, $u_h \in V_h$, $v \in H_0^{1,p}(\Omega)$ und $f \in H^{1,p'}(\Omega)$gilt:*

$$\int_f (v-\pi v)dx \le C\delta \int_\Omega G(|\nabla u_h|, |\nabla v|)dx + C(\delta)\sum_{z\in\Lambda}\int_{\omega_z} (|\nabla u_h|^{p-2} + h_z^2|\nabla f|)^{p'-2} h_z^4 |\nabla f|^2 dx$$
$$+ C\delta \sum_{z\in\Lambda} \min_{K\in T_z} \int_{\cup\varepsilon_z} G(|\nabla u_h|_K|, [\partial_n u_h]_\varepsilon)ds$$

4 Quasi-Norm Fehlerschätzer

Definition 4.1 (gradient recovery). Für $v_h \in V_h$ ist die gradient recovery $G_h v_h$ definiert durch

$$G_h v_h = \sum_{z\in D} G_h v_h(z)\varphi_z \quad \text{mit } G_h v_h(z) = \sum_{j=1}^{J_z} \alpha_z^j (\nabla v_h)_{K_z^j}$$

Wobei $\bigcup_{j=1}^{J_z} \bar{K_z^j} = \bar{\omega_z}$ und $0 \le \alpha_z^j \le$ mit $\sum_{j=1}^{J_z} \alpha_z^j = 1$.

Satz 4.2 (Robustheit). *Seien u und u_h Lösungen von (WP) und (WP_h). Sei 1 < p,p' < ∞ mit 1/p+1/p'=1 und $f \in H^{1,p'}(\Omega)$*

$$|u-u_h|^2_{(p)} \le C(\eta^2 + \epsilon^2)$$
$$\textit{wobei} \quad \eta^2 = \sum_{K\in T_h}\int_K (|\nabla u_h| + |\nabla u_h - G_h u_h|)^{p-2} |\nabla u_h - G_h u_h|^2 dx$$
$$\epsilon^2 = \sum_{K\in T_h}\int_K (|\nabla u_h|^{p-1} + h_K^2|\nabla f|)^{p'-2} h_K^4 |\nabla f|^2 dx$$

Satz 4.3 (Effizienz). *Seien u und u_h Lösungen von (WP) und (WP_h). Dann gilt:*

$$\eta \le C(|u-u_h|_{(p)} + \epsilon_1) \quad \textit{mit } \epsilon_1 = \inf_{v_h^k \in V_h^k} |u - v_h^k|_{(p)},$$

$$\eta \textit{ wie in Satz } (4.2),\ V_h^k = \{v_h^k \in C^1(\Omega) | \forall K \in T_h, v_h^k|_K \in P_k\}$$