Aufgabe 14: Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 2$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x}\ ,\ \text{b) } g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}\ ,\ \text{c) } h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\ ?$$

Lösung:

a)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x} = \frac{x-2}{x(x^2-4)} = \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{1}{x(x+2)}$$

stetig ergänzbar in $x = 2$ mit Funktionswert: $f(2) := \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}$.

b)

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}$$

<u>nicht</u> stetig ergänzbar!

$$g(2+h) = \frac{\sqrt{2+h}-2}{2+h-2} = \frac{\sqrt{2+h}-2}{h} \to -\infty \text{ für } h > 0, h \downarrow 0\,.$$

Denn:

$$\sqrt{2+h} \to \sqrt{2}\,;\ \sqrt{2+h}-2 \to \sqrt{2}-2 < 0$$

$$h > 0, h \downarrow 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{h} \to +\infty$$

$$\sqrt{2+h}-2 < 0 \text{ für kleines } h > 0\,.$$

$$g(2-h) = \frac{\sqrt{2-h}-2}{2-h-2} = \frac{\sqrt{2-h}-2}{-h} = \frac{2-\sqrt{2-h}}{h} \to +\infty \text{ für } h > 0, h \downarrow 0\,.$$

Denn:

$$2-\sqrt{2-h} \to 2-\sqrt{2} > 0\,!$$

c)

$$h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} \overset{x\neq 2}{=} \frac{x+2}{x-2}$$

<u>nicht</u> stetig ergänzbar!

$$h(2\pm h) = \frac{2\pm h+2}{2\pm h-2} = \frac{4\pm h}{\pm h} = 1 \pm \frac{4}{h} \to \left\{ \begin{array}{lll} +\infty & \text{für} & +, h > 0, h \downarrow 0 \\ -\infty & \text{für} & -, h > 0, h \downarrow 0 \end{array} \right\}$$

Aufgabe 15: Ist $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & , \text{auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & , \text{für } x = 0 \end{array} \right.$ differenzierbar in 0?

Lösung:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\cos\left(\frac{1}{h}\right) h^2 - 0}{h} = h\cos\left(\frac{1}{h}\right) \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

D.h. $f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Aufgabe 16: Zeigen Sie, daß jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.
Tipp: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz!

LÖSUNG: O.B.d.A. sei unser Polynom

$$p(x) = x^{2n+1} + c_{2n}x^{2n} + \ldots + c_1 x + c_0$$

normiert.
Da $p(x) = x^{2n+1}\left[1 + \frac{c_{2n}}{x} + \ldots + \frac{c_1}{x^{2n}} + \frac{c_0}{x^{2n+1}}\right]$

$$\Rightarrow \; p(x) = \begin{cases} \to +\infty & : \quad x \to +\infty \\ \to -\infty & : \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Man kann daher Stellen $a < b$ finden mit $p(a) < 0$ und $p(b) > 0$.
Deshalb gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $p(x_0) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz, da $p(x)$ stetig ist!

Bemerkung: Die Lösung der Aufgaben ist hier zu Ende. Man kann zusätzlich ein konkretes $b < \infty$ angeben, für das gilt $p(b) > 0$. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Für $x \geq \max(1, 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n} |c_\nu|\right)) \geq 1 > 0$ gilt:

$$\widetilde{p}(x) = c_{2n}x^{2n} + \ldots + c_0$$

$$|\widetilde{p}(x)| \overset{x\geq 1}{\leq} \left(\frac{1}{x}|c_{2n} + \ldots + c_0|\right) x^{2n+1} \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \left(\frac{1}{x}\sum_{\nu=0}^{2n}|c_\nu|\right) x^{2n+1}$$

Da $x \geq 1$ und gleichzeitig $x \geq 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n}|c_\nu|\right)$, kann man $|\widetilde{p}(x)|$ schließlich wie folgt abschätzen:

$$|\widetilde{p}(x)| \leq \frac{1}{2}x^{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) = x^{2n+1} + \widetilde{p}(x) \; &\geq \; x^{2n+1} - \frac{1}{2}x^{2n+1} \\ &= \; \frac{1}{2}x^{2n+1} \geq 1/2 > 0\,. \end{aligned}$$

Also kann man $b = \max(1, 2\left(\sum_{\nu=0}^{2n}|c_\nu|\right))$ wählen.
Entsprechend findet man ein a mit $p(a) < 0$!