Aufgabe 17: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

LÖSUNG: Definiere $f(x) := \cos^2 x + \sin^2 x$ und berechne

$$\begin{aligned} f(0) &= 1\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,,\ \sin 0 = 0\,, \\ f'(x) &= 2\cos x \cdot (-\sin x) + 2\sin x \cdot \cos x \\ &= 2(\sin x \cos x - \sin x \cos x) \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f(x) = \text{const.} = 1\,, \text{ da } f(0) = 1\,.$$

Aufgabe 18: Berechnen Sie die Ableitung von

$$\arccos(x) = (\cos^{-1})(x)\,.$$

(arccos ist eine Funktion von $[-1, 1]$ nach $[0, \pi]$.)

LÖSUNG: Mit Hilfe der Differentiationsregel für die Umkehrfunktion erhalten wir

$$\arccos'(x) = (\cos^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \tag{1}$$

Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gilt weiterhin, dass

$$(1) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

Also gilt $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.