

Aufgabe 21: Arbeiten Sie die Begriffe Vektorraum und Untervektorraum umfangreich nach. Machen Sie sich bewusst, dass bei einem Untervektorraum die Rechengesetze vom Vektorraum vererbt werden und lediglich die Abgeschlossenheit der Operationen zu prüfen ist.

Entscheiden Sie jeweils, ob U_1, \dots, U_7 ein Untervektorraum von V_1, \dots, V_7 ist und begründen Sie Ihre Entscheidung. Erarbeiten Sie sich bei jedem der Beispiele eine geometrische Vorstellung von den gegebenen Mengen.

- $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2 + x_2 = 2x_3 - 2\}, V_1 = \mathbb{R}^3.$
- $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 2 + 2x_2 = 2x_3 + 2\}, V_2 = \mathbb{R}^3.$
- $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3, x_2 = 0, |x| \leq 1\}, V_3 = \mathbb{R}^3.$
- $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3, x_2 = 0\}, V_4 = U_2.$
- $U_5 = U_4, V_5 = U_1.$
- $U_6 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_3, x_2 = 0\}, V_6 = U_1.$
- $U_7 = U_6, V_7 = \mathbb{R}^3.$

LÖSUNG: U_1 : Summen / Vielfache von Elementen aus U_1 sind in U_1 und die 0 ist auch drin. UVR von \mathbb{R}^3 .

U_2 : Die 0 ist nicht drin. Kein UVR.

U_3 : $(1/2, 0, 1/2)$ ist drin, aber $2(1/2, 0, 1/2)$ nicht. Kein UVR.

U_4 : Gerade in U_1 , die 0 enthält, aber U_4 ist keine Teilmenge von U_2 (der außerdem kein VR). Kein UVR von U_2 .

U_5 : Teilmenge von U_1 , die 0, Summe und Vielfache von Elementen enthält. UVR von U_1 .

U_6 : Menge, die 0, Vielfache und Summen und Elementen enthält, aber nicht in U_1 . Kein UVR von U_1 .

U_7 : Menge, die 0, Vielfache und Summen und Elementen enthält. UVR von \mathbb{R}^3 .