**Aufgabe 19:** Betrachten Sie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$y''(x) + 4\,y'(x) + 5\,y(x) = \cos(3x)$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = e^{-2x}\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right] + \frac{3}{40}\sin(3x) - \frac{1}{40}\cos(3x)$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Hierbei sind $c_1$ und $c_2$ zwei beliebige Konstanten aus $\mathbb{R}$.

**Aufgabe 20:** Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Formel (Produktregel für $n$ - Faktoren):

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n)' \quad = \quad & f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n \\ & + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n + \ldots \\ & + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_{n-1} \cdot f_n' \,.\end{aligned}$$

**Tipp**: Wie lautet die Formel für $n = 3$ und wie kann sie auf den Fall $n = 2$ zurückführen? Der Induktionsschritt im allgemeinen Fall läßt sich dann entsprechend durchführen.

**Aufgabe 21:** Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Man zeige, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl von $x_0$ ist und gebe diesen konstanten Wert des Flächeninhalts an!

**Aufgabe 22:** Zeigen Sie, daß für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

a) $(\cosh x)' = \sinh x$, b) $(\sinh x)' = \cosh x$,
c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Tipp**(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!