Aufgabe 32: a) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ für:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ für:

$$\text{i)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{ii)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+2 \\ 6-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+2 \\ 1+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

b) i)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BC} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$!

ii)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BC} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$!

Aufgabe 33: a) Wie lautet die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$ (als Basis von Urbild- und Bildraum)?

b) Zeigen Sie, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung aus a) bezüglich dieser Basis (als Basis von Urbild- und Bildraum).

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
f(1, 0) &= \begin{pmatrix} 1 + 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}\,; \text{ also } f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1}\,. \\
f(0, 1) &= \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2}
\end{aligned}$$

Nach der „Regel“:
„In den Spalten einer Matrix stehen die Koeffizienten der Bilder $f(\mathbf{v_j})$ der Basisvektoren $\mathbf{v_j}$, $j = 1, \cdots, n$ aus V bzgl. der Basis $\{\mathbf{w_i}\}$ $i = 1, \cdots, m$ von W, wobei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung ist.“
erhalten wir:

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ae_1} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} \\
&= \text{1te Spalte von } \mathbf{A} \quad \checkmark \\
\mathbf{Ae_2} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \text{2te Spalte von } \mathbf{A} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

<u>Beachte:</u>

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ae_1} &= \mathbf{e_1} = 1 \cdot \mathbf{e_1} + 0 \cdot \mathbf{e_2}\,, \\
\mathbf{Ae_2} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{e_1} + 1 \cdot \mathbf{e_2}\,!
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

Addition/Subtraktion liefert $2\lambda = 0:$ I+II, $2\mu = 0:$ II-I

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\lambda = 0 \\ 2\mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{\lambda = \mu = 0\}$$

Also sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

$\Rightarrow$ Basis! (wegen $\dim \mathbb{R}^2 = 2$!)

Wir zeigen (trotzdem für später):

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugen $\mathbb{R}^2$.

Dazu: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

Bestimme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha = x_1 + x_2 \\ 2\beta = x_2 - x_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \beta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \end{array} \right\}$$

D.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit erzeugen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch $\mathbb{R}^2$!

Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(-1,1) &= \begin{pmatrix} -1+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$ Matrixdarstellung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Denn $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt in der Basis $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ die Darstellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u_1} = 1 \cdot \mathbf{u_1} + 0 \cdot \mathbf{u_2}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{u_1} + (-1) \cdot \mathbf{u_2} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathbf{u_2} = 0 \cdot \mathbf{u_1} + 1 \cdot \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{u_1} + 0 \cdot \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 34: a) Wie lautet die Matrixdarstellung einer Punktspiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis?

b) Können Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ angeben, bzgl. der (wenn man sie als Basis des Bild- als auch des Urbildraums verwendet) die Punktspiegelung eine andere Matrixdarstellung hat?

LÖSUNG:

a)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Ax}$$

<u>Zur Probe:</u>

$$\begin{aligned} \mathbf{Ae_1} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\mathbf{e_1} \\ &= \text{1te Spalte von } \mathbf{A} \end{aligned}$$

entsprechend gilt:

$$\mathbf{Ae_2} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e_2} = \text{ 2te Spalte von } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Ae_3} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{e_3} = \text{ 3te Spalte von } \mathbf{A}$$

b) Nein! Sei etwa $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis, dann gilt

$$f(v_1) = -1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3.$$

$\Rightarrow$ erste Spalte der Matrixdarstellung: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geht man für v_2 und v_3 analog vor, so erhalten wir dieselbe Matrixdarstellung.