Aufgabe 35: Betrachten Sie die Abbildung

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie des Weiteren die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 an.

Lösung: Zunächst lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 &= 0, \\ 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 &= 0, \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass dies nur für $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ gilt. Also sind die drei Vektoren linear unabhängig. Da es drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind, handelt es sich also um eine Basis.
Des Weiteren gilt

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2v_2$$

$$f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4v_3$$

Daher ist f bzgl. v_1, v_2, v_3 gegeben durch:

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 36: Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius r um den Ursprung. Nehmen Sie an, der Äquator liege in der x-y-Ebene, der Nullmeridian in der x-z-Ebene (mit $x > 0$), und der Nordpol auf der positiven z-Achse.

a) Geben Sie die Koordinaten des Nordpols P an.

b) Angenommen, die geographische Breite werde durch einen Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (0 für den Nordpol, $\pi/2$ (bzw. 90°) für den Äquator, π (bzw. 180°) für den Südpol) beschrieben. Betrachten Sie den Punkt Q, der auf dem Nullmeridian liegt und (in diesem Sinne) Breite θ hat. Geben Sie die Matrixdarstellung der Drehung an, die P auf Q abbildet. Berechnen Sie mittels des Matrix-Vektor-Produkts die Koordinaten von Q.

c) Angenommen, die geographische Länge werde durch einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ (0 für den Nullmeridian, positive Winkel für östliche Länge, d.h. für $y > 0$) beschrieben. Betrachten Sie den Punkt R, der auf dem selben Breitenkreis wie Q liegt und (in diesem Sinne) Länge ϕ hat. Geben Sie die Matrixdarstellung der Drehung an, die Q auf R abbildet. Berechnen Sie mittels des Matrix-Vektor-Produkts die Koordinaten von R.

d) Geben Sie die Matrixdarstellung der Verkettung der beiden Drehungen an. Berechnen Sie das Matrix-Vektor-Produkt dieser Matrix mit dem Vektor P. Welcher Punkt ergibt sich?

Tipp: Eine Skizze kann hilfreich sein. Achten Sie darauf, dass die Drehwinkel das richtige Vorzeichen haben!

LÖSUNG:

a) Die Koordinaten des Nordpols sind bei dieser Wahl des Koordinatensystems gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

b) Die Drehung in der x-z-Ebene (in der der Nullmeridian liegt) - d.h. um die y-Achse - um den Winkel $-\theta$ ist gegeben durch die lineare Abbildung:

$$A_{y\text{-Achse}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dann berechnen sich die Koordinaten von Q wie folgt:

$$Q = A_{y\text{-Achse}} \cdot P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta) \\ 0 \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Der Winkel muss $-\theta$ (nicht $+\theta$) sein, damit $x > 0$ ist.

c) Die Drehung in der x-y-Ebene (in der der Äquator liegt) - d.h. um die z-Achse - um den Winkel ϕ ist gegeben durch die lineare Abbildung:

$$A_{z\text{-Achse}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann berechnet sich R wiefolgt:

$$R = A_{z\text{-Achse}} Q = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\sin(\theta) \\ 0 \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Der Winkel muss ϕ (nicht $-\phi$) sein, damit sich für positive Winkel positive y-Werte ergeben.

d) Die Matrix der Verkettung bezeichnen wir mit $A_{\text{Verkettung}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A_{\text{Verkettung}} &= A_{z\text{-Achse}} \cdot A_{y\text{-Achse}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Abbildung von P unter $A_{\text{Verkettung}}$

$$\begin{aligned} A_{\text{Verkettung}} P &= \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} = R, \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten die gleichen Koordinaten.

Aufgabe 37: Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & & & - & a \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte der reellen Parameter a und b dieses System
(a) keine, (b) genau eine, (c) unendlich viele Lösungen hat.
Im Falle (c) bestimme man ferner die allgemeine Lösung in Vektorform!

LÖSUNG: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & b \\ 1 & 0 & -a & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{b}{3} \\ 0 & 0 & -a+\frac{1}{3} & 2+\frac{b}{3} \end{array}\right)$

a) keine Lösung, wenn $a = \frac{1}{3}$ und $b \neq -6$, da $\operatorname{rg} A = 2$, aber $\operatorname{rg}(A|\mathbf{b}) = 3$.

b) genau eine Lösung, wenn $a \neq \frac{1}{3}$, da $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b}) = 3$

c) unendliche viele Lösungen, wenn $a = \frac{1}{3}$ und $b = -6$, da $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b}) = 2$

allgemeine Lösung in Vektorform: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$