Aufgabe 42: Rechnen Sie nach, dass sich die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit folgender Regel berechnen lässt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Aufgabe 43:

a) Man bestimme f_x und f_y für $f(x,y) = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$.

b) Man bestimme $f_{x,x}$, $f_{y,y}$, $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ für $f(x,y) = 2x^2 - 5xy + y^2$ und $f(x,y) = \sin(3x)\cos(4y)$.

Hinweis: Dabei ist f_x die partielle Ableitung nach x, $f_{x,y}$ die zweite partielle Ableitung, wobei zuerst nach x und danach nach y abgeleitet wird usw.

Aufgabe 44: Gegeben sind die Funktionen

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die $1-$Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ und an den vier Stellen der Form (x_1, x_1), $(x_1, -x_1)$, die auf der $1-$Niveaulinie liegen. Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.