Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **25. August 2017**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte	Note	Datum	Unterschrift
______________	_____	__________	__________________________
______________	_____	__________	__________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e x^2 \ln(x) \mathrm{d}x \,.$$

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x \,.$$

(5 Punkte)

Lösung: a)

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{3} x^3 \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \\ &= \frac{1}{9}(2e^3 + 1) \end{aligned}$$

b) Variante 1: Substitution mit $y = 1 + x^2$. Also ist

$$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = 2(\sqrt{10} - 1) \,.$$

Variante 2: Substitution mit $\sinh$:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x &= \int_0^{arsinh(z)} \frac{2 \sinh(y)}{\sqrt{1 + \sinh(y)}} \cosh(y) \mathrm{d}y \\ &= 2 \int_0^{arsinh(z)} \sinh(y) \mathrm{d}y = 2(\cosh(arsinh(z)) - \cosh(0)) = 2(1+z^2)^{\frac{1}{2}} - 2 \end{aligned}$$

b)

Aufgabe 2: Seien im Folgenden $a, b, \phi \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

a) Geben Sie den Real- und den Imaginärteil von

$$\frac{1}{a+ib} \quad \text{und} \quad \frac{1}{re^{i\phi}} = (re^{i\phi})^{-1}$$

an. (1+2 Punkte)

b) Geben Sie den Real- und den Imaginärteil von i^{2017} an. (2 Punkte)

c) Geben Sie den Real- und den Imaginärteil von e^{a+ib} an. (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil aller Lösungen von

$$z^4 = -4\,.$$

(3 Punkte)

Lösung:
a)

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$$
$$\frac{1}{re^{i\phi}} = \frac{\cos(\phi)}{r} + i\frac{-\sin(\phi)}{r}$$

b) $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^{2017} = i^{2016}i = i$, also Realteil 0, Imaginärteil 1
c) $e^{a+ib} = e^a\cos(b) + ie^a\sin(b)$
d) $-4 = 4e^{i\pi}$, also sind alle Loesungen von $z^4 = -4$ gegeben durch

$$z \in \{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$$

In Real- und Imaginärteil:

$$z \in \{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\left(\exp\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{3}y^3-y\right).$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. (2+3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von f. (2 Punkte)

c) Klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f nach Minima, Maxima oder Sattelpunkten. (3 Punkte)

Lösung:

$$Df=\left(e^{\frac{x^3}{3}-x}\left(x^2-1\right)\left(\frac{y^3}{3}-y\right),e^{\frac{x^3}{3}-x}\left(y^2-1\right)\right)$$

Also sind die kritischen Punkte $(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$

$$D^2f=\begin{pmatrix}\left(\frac{y^3}{3}-y\right)e^{\frac{x^3}{3}-x}\left(x^2-1\right)^2+2\left(\frac{y^3}{3}-y\right)e^{\frac{x^3}{3}-x}x & e^{\frac{x^3}{3}-x}\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\\ e^{\frac{x^3}{3}-x}\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) & 2e^{\frac{x^3}{3}-x}y\end{pmatrix}$$

also in $(-1,1)$ Minimum (positiv definit), in $(-1,-1)$ Maximum (negativ definit), Sattelpunkte in $(1,1),(1,-1)$.

Aufgabe 4:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ glatt. Wie lautet der Satz von Gauß auf Ω? (2 Punkte)

b) Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und

$$v : \Omega \to \mathbb{R}^2 , \quad v(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie für v beide im Satz von Gauß auftretenden Integrale.

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\partial\Omega$ durch $\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$ parametrisiert ist. Es gilt $\int \cos(\phi)^2 \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}(\phi + \sin(\phi)\cos(\phi))$. (4+4 Punkte)

Lösung:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ eine glatte Fläche (in dem Sinn, dass der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, stetig differenzierbare Parametrisierungbesitzt). Mit $N(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld v auf $\bar{\Omega}$

$$\int_\Omega \mathrm{div} v(x) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot N(x) \, \mathrm{d}a(x)$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}a(x, y) &= \int_{\partial\Omega} x^2(x^2 + y^2) \mathrm{d}a(x, y) \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(\phi)^2 \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}(\phi + \sin(\phi)\cos(\phi))\Big|_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega 3x^2 + x^2 \mathrm{d}(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r 4(r\cos(\phi))^2 \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = \pi$$

Aufgabe 5: Sei $v \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor der Länge 1 und $H = \mathbb{1} - 2vv^T$, wobei $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{d,d}$ die Einheitsmatrix ist.

a) Rechnen Sie nach, dass H stets symmetrisch ist. (2 Punkte)

b) Rechnen Sie nach, dass H stets orthogonal ist. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von H ist.
Geben Sie den dazugehörigen Eigenwert an. (2 Punkte)

d) Sei $w \in \mathbb{R}^d, w \neq 0, v^T w = 0$.
Zeigen Sie, dass w ein Eigenvektor von H ist.
Geben Sie den dazugehörigen Eigenwert an. (2 Punkte)

e) Berechnen Sie die Determinante von H.
Hinweis: Verwenden Sie c) und d). (2 Punkte)

Lösung:
a) Es ist $H^T = (\mathbb{1} - 2vv^T)^T = \mathbb{1} - 2(vv^T)^T = \mathbb{1} - 2vv^T = H$.
b) Es gilt

$$\begin{aligned} HH^T &= H^2 = (\mathbb{1} - 2vv^T)(\mathbb{1} - 2vv^T) \\ &= \mathbb{1} - 2vv^T - 2vv^T + 4vv^Tvv^T = \mathbb{1} - 2vv^T - 2vv^T + 4vv^T = \mathbb{1}\,. \end{aligned}$$

c) Es ist $Hv = \mathbb{1}v - 2vv^Tv = v - 2v = -v$, also ist v Eigenvektor von H mit Eigenwert -1.
d) Es ist $Hw = \mathbb{1}w - 2vv^Tw = w$, also ist w Eigenvektor von H mit Eigenwert 1.
e) Es ist $\det(H) = (-1) \cdot 1^{n-1} = -1$.

Aufgabe 6:

a) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ für $d \geq 2$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit einem Restglied dritter Ordnung) von f um dem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ an. (2 Punkte)

Sei im Folgenden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)$.

b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. (2+3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) der Funktion f um den Punkt $(x_1, x_2) = (0, 1)$. (3 Punkte)

Lösung:
a) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion und $y \in \mathbb{R}^d$. Dann existiert ein von x und y abhängiges $\theta \in (0, 1)$ so dass

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} y^\alpha + \sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta y)}{\alpha!} y^\alpha \\
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2 f(x) y + O(\|y\|^3).
\end{aligned}
$$

b) Es gilt

$$
\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2} \\ \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}
$$

und

$$
D^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1^2+x_2^2+1} - \frac{4x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2+1\right)^2} & -\frac{4x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+1\right)^2} \\ -\frac{4x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+1\right)^2} & \frac{2}{x_1^2+x_2^2+1} - \frac{4x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2+1\right)^2} \end{pmatrix}
$$

c) Es ist

$$
\nabla f((0,1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

und

$$
D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Daher $f(x+y) = \ln(2) + y_2 + \frac{1}{2} y_1^2 + Rest$.

Aufgabe 7: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine viermal stetig differenzierbare Funktion und $h \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| = O(h^2)$$

gilt. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{-11f(x) + 18f(x+h) - 9f(x+2h) + 2f(x+3h)}{6h} - f'(x) \right| = O(h^3)$$

gilt. (5 Punkte)

Lösung:
a)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \tfrac{1}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4)\,, \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) - \tfrac{1}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4)\,. \end{aligned}$$

Addieren beider Abschätzungen ergibt

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + O(h^4)\,.$$

b)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \tfrac{1}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4)\,, \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \tfrac{8}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4)\,, \\ f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \tfrac{9}{2}h^2 f''(x) + \tfrac{27}{6}h^3 f'''(x) + O(h^4)\,. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$18f(x+h) - 9f(x+2h) + 2f(x+3h) - 11f(x) = 6hf'(x) + O(h^4)\,.$$

Aufgabe 8: Diagonalisieren Sie die (nicht symmetrische) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

(10 Punkte)

Lösung:
Die Matrix hat die Eigenwerte 1 und 2 (doppelter Eigenwert) mit Eigenvektoren

$$(1,1,1)^T, (-1,0,3)^T, (1,1,0)^T .$$

Daher gilt mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} , \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

und $Q = \operatorname{diag}(1,2,2)$:

$$A = PQP^{-1} .$$

Aufgabe 9: Gegeben sei eine Parametrisierung

$$x(z,\varphi) = \begin{pmatrix} r(z)\cos(\varphi) \\ r(z)\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

wobei $r(z) = \sqrt{z}$, $z \in [0,4]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$.

a) Welches Fläche wird durch x parametrisiert? (2 Punkte)

b) Geben Sie die Metrik der durch x parametrisierten Fläche an. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. (4 Punkte)

Lösung:

1. Zunächst handelt es sich um eine Rotationsfläche mit Funktion $r(z) = z^{\frac{1}{2}}$.

2.

$$Dx = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}\cos(\varphi) & -z^{\frac{1}{2}}\sin(\varphi) \\ \frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}\sin(\varphi) & z^{\frac{1}{2}}\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}z^{-1} + 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

$$\text{Flächeninhalt} = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \sqrt{detg}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4} + z}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi \cdot (\frac{1}{4} + z)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = 2\pi(\sqrt{\frac{25}{4}}^3 - \sqrt{\frac{1}{4}}^3) = 31\pi$$

Aufgabe 10:

a) Geben Sie den Transformationssatz der Integralrechnung im Raum $\mathbb{R}^d$ an. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil a) das Volumen der Menge

$$M_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -2 \le x \le 2, 1 \le y^2 + z^2 \le 16\right\}.$$

(4 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil a) den Flächeninhalt der Menge

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (ax)^2 + (by)^2 \le 1\}$$

mit $a, b > 0$. (4 Punkte)

Lösung:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ invertierbar und stetig differenzierbar und $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann gilt

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega f(g(x))|\det(Dg(x))|\mathrm{d}x\,.$$

b) Setze

$$g(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} z \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

und $\Omega = \{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le r \le 4, 0 \le \phi < 2\pi, -4 \le z \le 4\}$. Dann ist

$$Dg(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\phi) & -r\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

und $|\det(Dg(r, \phi, z))| = r$. Mit dem Transformationssatz und $f = 1$ folgt

$$\begin{aligned} V &= \int_{g(\Omega)} 1\mathrm{d}y = \int_{g(\Omega)} f(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega f(g(r, \phi, z))|\det(Dg(r, \phi, z))|\mathrm{d}(r, \phi, z) \\ &= \int_{-4}^4 \int_0^{2\pi} \int_1^4 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z = 8 \cdot 2 \cdot \pi[\tfrac{1}{2}r^2]_1^4 = 120\pi\,. \end{aligned}$$

c) Sei

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \end{pmatrix}$$

Dann gilt (mit Ω Einheitskreis)

$$A = \int_{g(\Omega)} 1\mathrm{d}y = \int_\Omega |\det(Dg(x, y))|\mathrm{d}(x, y) = \frac{\pi}{ab}\,.$$