Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **14. März 2017**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte ______ Note ______ Datum ______ Unterschrift ______

______ ______ ______ ______

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 (x+1)e^x \,\mathrm{d}x\,.$$

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin(x)+1}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(5 Punkte)

Lösung: a)

$$\int_0^1 (x+1)e^x \,\mathrm{d}x = [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = (2e-1) - [e^x]_0^1 = (2e-1) - (e-1) = e$$

b) Substitution $y = \sin(x) + 1$, $dy = \cos(x)\,dx$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin(x)+1}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\sin(-\frac{\pi}{2})+1}^{\sin(\pi)+1} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\,\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$$

b)

Aufgabe 2:

a) Lösen Sie $z^2 + 4z + 8 = 0$ für $z \in \mathbb{C}$. (3 Punkte)

b) Lösen Sie $z^8 = 16$ für $z \in \mathbb{C}$. Wie viele Lösungen gibt es? Fertigen Sie eine Skizze an. (4 Punkte)

c) Sei $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Geben Sie $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ abhängig von r und ϕ an. (3 Punkte)

Lösung: a) $z = -2 \pm \sqrt{4-8} = -2 \pm 2i$.

b) $z^8 = 16$ hat acht Lösungen: $z^8 = 16 = 16e^{0\,\pi i} = 16e^{2\pi i} = \ldots = 16e^{14\pi i}$, also

$$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{k}{4}\pi i}\,, \quad k = 0, \ldots, 7\,.$$

c) Es gilt $z = re^{i\phi} = r\,(\cos(\phi) + i\,\sin(\phi))$, also $\mathrm{Re}(z) = r\,\cos(\phi)$ und $\mathrm{Im}(z) = r\,\sin(\phi)$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + y^3 - 3y\,.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von f. (5 Punkte)

b) Klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f nach Minima, Maxima oder Sattelpunkten. (5 Punkte)

Lösung:
a) Berechne

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+1} \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Aus $\nabla f(x, y) = 0$ folgt dann $x = 0$ und $3y^2 - 3 = 0$, d.h. $y = 1$ oder $y = -1$. Mögliche kritische Punkte sind also gegeben durch $(0, 1)$ und $(0, -1)$.

b) Berechne

$$\text{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Also

$$\text{Hess} f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to \text{ pos. definit } \to \text{ lokales Minimum}$$

$$\text{Hess} f(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

Aufgabe 4: Lösen Sie mittels des QR-Verfahrens (und *nicht* unter Verwendung der Normalengleichung) das Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 11 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \right\|^2 \to \min!$$

Geben Sie die Minimalstelle (x, y) und das Quadrat des Residuums (den Wert der obigen quadrierten Norm an der Minimalstelle) an.

(10 Punkte)

Lösung:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 11 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -\operatorname{sgn}(a_{11})\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{15} v_1 v_1^T$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$A^{(2)}$ ist schon obere Dreiecksmatrix, daher können wir direkt einsetzen:

$$A = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (2, 1).$$

Das Quadrat des Residuums ist gegeben durch $15^2 = 225$.

Aufgabe 5:

a) Geben Sie den Transformationssatz an. (2 Punkte)

b) Wie lautet der Transformationssatz für Kugelkoordinaten? Geben Sie insbesondere die Determinante der Jacobimatrix an. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Achtelkugel $\mathcal{K}$, wobei

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0 \right\} .$$

(5 Punkte)

Lösung:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ invertierbar und stetig differenzierbar, Dg gleichmäßig stetig auf Ω und $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann gilt

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Hier gilt

$$g : \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\phi \\ r\sin\vartheta\sin\phi \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0,\pi]\,, \quad \phi \in [0, 2\pi]\,, \quad r \in [0,1]\,.$$

mit

$$Dg(r,\vartheta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & r\cos\vartheta\cos\phi & -r\sin\vartheta\sin\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi & r\cos\vartheta\sin\phi & r\sin\vartheta\cos\phi \\ \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\det Dg(r,\vartheta,\phi) = r^2\sin\vartheta\,.$$

Also gilt mit $\Omega = \{z = (r,\vartheta,\phi) \,:\, r \in [0,1]\,, \vartheta \in [0,\pi]\,, \phi \in [0,2\pi]\,\}$ dann

$$\int_{\|x\|^2 \leq 1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(g(z))\,|\det Dg(z)|\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(z)\,r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,.$$

c) Der Schwerpunkt $x_s \in \mathbb{R}^3$ von

$$\mathcal{K} = \{(r,\vartheta,\phi) \,:\, r \in [0,1]\,, \vartheta \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\,, \phi \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\,\}$$

ist definiert als

$$x_s = \frac{1}{M_\mathcal{K}} \int_\mathcal{K} x\,\mathrm{d}x\,,$$

mit

$$M_{\mathcal{K}} = \int_{\mathcal{K}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{6} \,.$$

Da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = -\left[\sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 0 + \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \mathrm{d}\vartheta \,,$$

folgt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{4}$, und analog $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}$ und somit

$$\begin{aligned}
(x_s)_1 &= \frac{1}{M_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} x_1 \,\mathrm{d}x &= \frac{6}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\vartheta \cos\phi \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8} \\
(x_s)_2 &= \frac{1}{M_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} x_2 \,\mathrm{d}x &= \frac{6}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\vartheta \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8} \\
(x_s)_3 &= \frac{1}{M_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} x_3 \,\mathrm{d}x &= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Ausrechnen einer Komponente und Argumentation mittels Symmetrie reicht aus!

Aufgabe 6: Sei

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + 1}\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. (2+3 Punkte)

b) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung 2-ter Ordnung (d.h. mit Restglied 3-ter Ordnung) von f um dem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ an.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) der Funktion f aus Teil a) um den Punkt $(x_1, x_2) = (0, 1)$.

(3 Punkte)

Lösung: a)

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2+1)^2} \\ \frac{1}{x_1^2+1} \end{pmatrix},$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1x_1} f & \partial^2_{x_1x_2} f \\ \partial^2_{x_2x_1} f & \partial^2_{x_2x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2x_2(x_1^2+1)^2 - 2x_1x_2\,2(x_1^2+1)\,2x_1}{(x_1^2+1)^4} & -\frac{2x_1}{(x_1^2+1)^2} \\ -\frac{2x_1}{(x_1^2+1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 3-mal stetig differenzierbar, dann gilt

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + O(\|\xi\|^3)\,.$$

bzw, alternativ

$$f(x + \xi) = f(x) + \nabla f(x) \cdot \xi + \frac{1}{2} D^2 f(x) \xi \cdot \xi + O(\|\xi\|^3)\,.$$

c) Nach a) gilt

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D^2 f(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also mit $f(0, 1) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} f(\xi) &= 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\xi_2 - \xi_1^2 + O(\|\xi\|^3)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Sei

$$f(x) = \sin^2(x)\,.$$

a) Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom p, das f in den Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ und $x_2 = \pi$ interpoliert. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie eine Approximation des Integrals $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe einer numerischen Quadratur basierend auf den Knoten aus a). (4 Punkte)

Lösung: a) Es gilt

$$f(x_0) = f(0) = 0, \quad f(x_1) = f(\pi/2) = 1, \quad f(x_2) = f(\pi) = 0\,.$$

Gesucht: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $p(0) = 0,\ p(\pi/2) = 1,\ p(\pi) = 0$

Lagrangeformel:

$$p(x) = \sum_i f(x_i) p_i(x) \quad \text{mit} \quad p_i(x) = \Pi_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,,$$

also $p(x) = 1\,p_1(x)$ mit

$$p_1(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} = -\frac{4}{\pi^2} x(x-\pi) = \frac{4}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} x^2\,.$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
p(0) = 0 &\;\Rightarrow\; a_0 = 0 \\
p(\pi/2) = 1 &\;\Rightarrow\; a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \frac{\pi^2}{4} = 1 \\
&\;\Rightarrow\; 2a_1\pi + a_2\pi^2 = 4 \quad \mathrm{I} \\
p(\pi) = 0 &\;\Rightarrow\; a_1\pi + a_2\pi^2 = 0 \quad \mathrm{II}
\end{aligned}$$

I-II: $a_1\pi = 4 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{4}{\pi}$, einsetzen in II: $4 + a_2\pi^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_2 = -\frac{4}{\pi^2}$.

b) Keplersche Fassregel, i.e. $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \approx \pi \cdot (\frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{4}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 0) = \frac{2}{3}\pi$. Alternativ:

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^\pi p(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,p_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\frac{\pi^2}{2} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi\,.$$

Aufgabe 8: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x^2+y^2+3z^2+2xz=0\right\}$$

gegebenen Ellipsoids. (10 Punkte)

Lösung:

$$3x^2+y^2+3z^2+2xz=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 0\,, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Berechne Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)\cdot\big((3-\lambda)(3-\lambda)-1\big) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda+8)\\ &= (1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Die Halbachsenlängen sind gegeben durch $1/\sqrt{\lambda_i}$.

Normierter Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ bzw. die Achse der Länge $a = 1$::

$$\ker(A-1\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\rangle$$

Normierte Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ bzw. die Achse der Länge $b = 1/\sqrt{2}$:

$$\ker(A-2\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\rangle$$

Normierter Eigenvektor zu $\lambda_3 = 4$ bzw. die Achse der Länge $c = 1/2$::

$$\ker(A-4\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\rangle$$

Aufgabe 9: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein Kurve.

a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Bogenlänge von γ an. (2 Punkte)

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Krümmung (mit Vorzeichen) von γ an. (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b].$$

c) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Bogenlänge von γ in Abhängigkeit von f an. (2 Punkte)

d) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Krümmung (mit Vorzeichen) von γ in Abhängigkeit von f an. (2 Punkte)

e) Berechnen Sie die Kümmung von γ für $f(t) = t^2$. (2 Punkte)

Lösung:

a) Für eine differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$L[\gamma(t)] = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \,\mathrm{d}t$$

b) Für eine zweimal differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$ gilt

$$\kappa(t) = \frac{\ddot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(t) - \ddot\gamma_2(t)\dot\gamma_1(t)}{\|\dot\gamma(t)\|^3}$$

für alle $t \in (a,b)$.

c)

$$L[\gamma(t)] = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \,\mathrm{d}t$$

d)

$$\kappa(t) = \frac{\ddot f(t)\frac{d}{dt}(t \mapsto t) - \frac{d^2}{dt^2}(t \mapsto t)\dot f(t)}{\|1 + (f'(t))^2\|^3} = \frac{\ddot f(t)}{\|1 + (f'(t))^2\|^3}$$

e)

$$\kappa(t) = \frac{\ddot f(t)}{\|1 + (f'(t))^2\|^3} = \frac{2}{\|1 + 4t^2\|^3}$$

Aufgabe 10: Betrachte die durch

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u}\,\cos(v) \\ \sqrt{u}\,\sin(v) \\ \sqrt{u} \end{pmatrix}, \quad u \in [0,H], v \in [0,2\pi]$$

parametrisierte Fläche $\mathcal{M}$.

a) Berechnen Sie die Metrik.

(4 Punkte)

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von $\mathcal{M}$ an.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{M}$.

(2 Punkte)

d) Um welches geometrisches Objekt handelt es sich bei $\mathcal{M}$?

(2 Punkte)

Lösung:
a)

$$Dx(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cos v & -\sqrt{u}\sin v \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\sin v & \sqrt{u}\cos v \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad G(u,v) = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

da für $G = (G_{ij})_{ij}$ gilt $G_{12} = G_{21} = 0$ sowie

$$\begin{aligned} G_{11} &= \tfrac{1}{4}u^{-1}\cos^2 v + \tfrac{1}{4}u^{-1}\sin^2 v + \tfrac{1}{4}u^{-1} = \tfrac{1}{2}u^{-1} \\ G_{22} &= u\sin^2 v + u\cos^2 v = u\,. \end{aligned}$$

b) Sei $\Omega = \{(u,v)\ :\ u \in [0,H]\,, v \in [0,2\pi]\}$, also $\mathcal{M} = x(\Omega)$. Dann gilt

$$|\mathcal{M}| = \int_{\mathcal{M}} da = \int_{x(\Omega)} da = \int_{\Omega} |\det G(u,v)|^{1/2}\,du\,dv$$

c) Mit a) folgt $\det G(u,v) = 1/2$, also folgt mit b)

$$|\mathcal{M}| = \int_{\Omega} |\det G(u,v)|^{1/2}\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^H 1/\sqrt{2}\,dudv = \sqrt{2}H\pi$$