Aufgabe 3: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix},$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).
Berechen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{S}$.

LÖSUNG: Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v,w) = \Big(\partial_v x \;\Big|\; \partial_w x\Big) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v,w)^T Dx(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\sqrt{\det G(v,w)} = r(R + r\cos w)$.

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(\mathcal{S}) &= \int_{\mathcal{S}} da = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\det G(v,w)}\,dv\,dw \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos w)\,dv\,dw \\ &= 2\pi(2\pi rR + \int_0^{2\pi} r^2\cos w\,dw) \\ &= 4\pi^2 rR. \end{aligned}$$