

Aufgabe 8: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$v_1(x) = \sin(x)$$

$$v_2(x) = \sin(2x)$$

$$v_3(x) = \sin(3x)$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V .

a) Zeigen Sie, dass v_1 , v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x)w(x) dx$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)).$$

LÖSUNG: Zuerst beweisen wir die im Tipp aufgestellte Behauptung:

Sei $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$

$$\sin(ax) = \frac{1}{2i} (e^{iax} - e^{-iax})$$

$$\sin(bx) = \frac{1}{2i} (e^{ibx} - e^{-ibx})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(ax) \sin(bx) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x})}{2} - \frac{(e^{i(a-b)x} + e^{-i(a-b)x})}{2} \right], \\ &= \frac{1}{2} (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)) \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} g(\sin(ax), \sin(bx)) &= \int_0^\pi \sin(ax) \sin(bx) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)) dx \\ &= \frac{1}{2(a-b)} [\sin((a-b)x)]_0^\pi - \frac{1}{2(a+b)} [\sin((a+b)x)]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

weil $a - b \neq 0$ und $a + b \neq 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen v_1, v_2 und v_3 bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot, \cdot)$ orthogonal sind.

- b) Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bilden sie also eine orthogonale Basis und wir müssen nur noch normieren:

Die normierte Basis, nennen wir sie w_1, w_2, w_3 , erhalten wir wie folgt:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin(x), \sin(x))}} \sin(x)$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin(2x), \sin(2x))}} \sin(2x)$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{g(\sin(3x), \sin(3x))}} \sin(3x)$$

Sei $a \in \mathbb{N}$,

$$g(\sin(ax), \sin(ax)) = \int_0^\pi \sin(ax) \sin(ax) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos((2a)x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} [x]_0^\pi - \frac{1}{2a} [\sin(2ax)]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

und dann

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x)$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(3x)$$

Bemerkung: Wenn die Basis nicht bereits orthogonal wäre, könnten wir das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Dieses funktioniert mit dem Skalarprodukt $g(\cdot, \cdot)$ analog zum Vorgehen im \mathbb{R}^3 .

- c) Die orthogonale Projektion der Funktion $f(x)$ auf den Vektorraum V bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot, \cdot)$ berechnet sich wie folgt

$$Pf(x) = g(f(x), w_1(x))w_1(x) + g(f(x), w_2(x))w_2(x) + g(f(x), w_3(x))w_3(x)$$

$$\begin{aligned}
g(f(x), w_1(x)) &= \int_0^\pi f(x)w_1(x) \, dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \, dx \\
&= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \, dx \\
&= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-x \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx \right) \\
&= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
g(f(x), w_2(x)) &= \int_0^\pi f(x)w_2(x) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \right) \, dx \\
&= 0 \\
g(f(x), w_3(x)) &= \int_0^\pi f(x)w_3(x) \, dx \\
&= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(3x) \, dx \\
&= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{3} x \cos(3x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) \, dx \right) \\
&= \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(3x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
Pf(x) &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} w_1(x) - \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} w_3(x) \\
&= \frac{4}{\pi} \sin(x) - \frac{4}{9\pi} \sin(3x)
\end{aligned}$$

