Aufgabe 9: Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x,y) = xy \quad \text{und} \quad w(u,v) = u^2 - v^2.$$

a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x,y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u,v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 4, 16$.

b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinen von z ab und umgekehrt?

c) Welche 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \quad , \quad (u,v) \mapsto \mathbf{g}(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

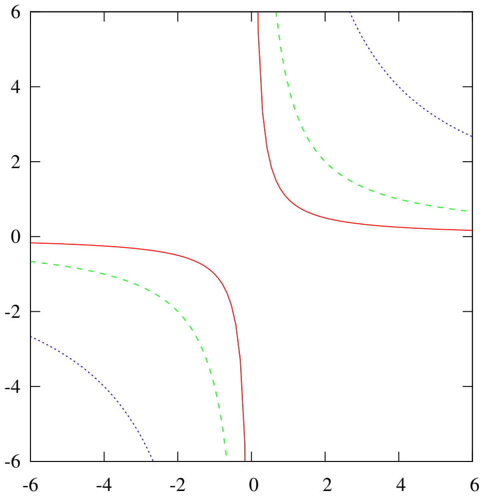
e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

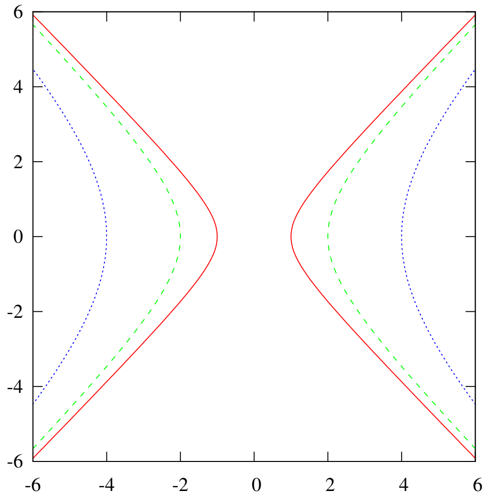
$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x,y) = D\mathbf{g}(u,v) \cdot \mathbf{A} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u,v) = D\mathbf{f}(x,y) \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

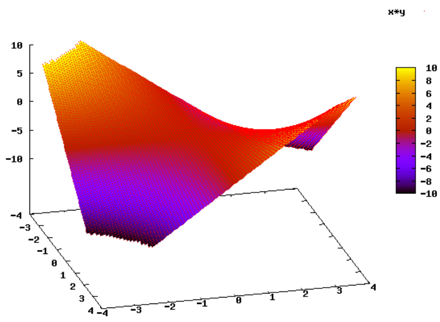
LÖSUNG:

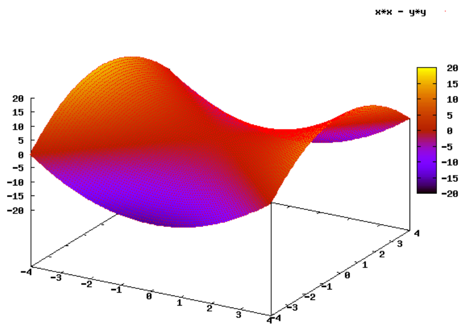
a) $N_{\{z=c\}}$ sind Hyperbeln der Form $y = \frac{c}{x}$. $N_{\{w=c\}}$ sind Kurven der Form $v = \pm\sqrt{u^2 - c}$.





Die Graphen der beiden Funktionen sehen wie folgt aus:





b) Die Niveaulinien gehen auseinander hervor, indem man

$$
\begin{aligned}
x &= u - v \\
y &= u + v \\
\Rightarrow xy &= (u-v)(u+v) = u^2 - v^2
\end{aligned}
$$

ausdrückt. Das entspricht

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Umgekehrt ist

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}(y + x) \\
v &= \frac{1}{2}(y - x)
\end{aligned}
$$

und somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und somit entspricht A einer einer Rotation um 45 Grad gefolgt von einer Skalierung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y + x \\ y - x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

d)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$
$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

e)

$$\begin{aligned}
Dg(u,v)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2(u+v) & 2(u-v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u+v & u-v \end{pmatrix}, \\
(g\circ A)(x,y) = g\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+x) \\ \frac{1}{2}(y-x) \\ \frac{1}{4}(y+x)^2 - \frac{1}{4}(y-x)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+x) \\ \frac{1}{2}(y-x) \\ xy \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \; D(g\circ A)(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ u+v & u-v \end{pmatrix} \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
Df(x,y)\cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x+y & x-y \end{pmatrix}, \\
D(f\circ A^{-1})(u,v) &= D\begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ x+y & x-y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$