

**Aufgabe 10:** Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - 7xy + 2x^2y$$

im Punkt  $(1, 1)$  mit Restglied der Ordnung 4. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}f(1, 1) &= -4 \\f_x(x, y) &= 3x^2 - 7y + 4xy \Rightarrow f_x(1, 1) = 0 \\f_y(x, y) &= -7x + 2x^2 \Rightarrow f_y(1, 1) = -5 \\f_{xx}(x, y) &= 6x + 4y \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = 10 \\f_{xy}(x, y) &= -7 + 4x \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = -3 \\f_{yy}(x, y) &= 0 \\f_{xxx}(x, y) &= 6 \\f_{xxy}(x, y) &= 4 \\f_{xyy}(x, y) &= f_{yyy}(x, y) = 0\end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\&\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + f_{yy}(1, 1)(y - 1)^2) \\&\quad + \frac{1}{6} (f_{xxx}(1, 1)(x - 1)^3 + 3f_{xxy}(1, 1)(x - 1)^2(y - 1) + 3f_{xyy}(1, 1)(x - 1)(y - 1)^2 + f_{yyy}(1, 1)(y - 1)^3) \\&\quad + O((x - 1)^4 + (y - 1)^4) \\&= -4 - 5(y - 1) + 5(x - 1)^2 - 3(x - 1)(y - 1) + (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2(y - 1) + O((x - 1)^4 + (y - 1)^4)\end{aligned}$$

Ausmultiplikation:

$$\begin{aligned}&-4 - 5(y - 1) + 5(x - 1)^2 - 3(x - 1)(y - 1) + (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2(y - 1) \\&= -4 - (5y - 5) + (5x^2 - 10x + 5) - (3xy - 3x - 3y + 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (2x^2y - 4xy - 2x^2 + 4x + 2y - 2) \\&= x^3 - 7xy + 2x^2y = f(x, y)\end{aligned}$$