Aufgabe 11: Gegeben sei die Funktion

$$\mathbf{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

und betrachten Sie die Menge

$$\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \mathbf{f}(x,y,z) = 0\} \, .$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:

a) $h(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt eine Kugel $B_R(M) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 2$ ($R^2 = 4\,!$) und Mittelpunkt $M = (2,0,0)^T$.

$g(x,y,z) = x - 1 = 0$ beschreibt die Ebene $x = 1$, die parallel zur y-z-Ebene ist und den Abstand 1 von dieser Ebene hat.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Schnittmenge beider Figuren:

Die Schnittmenge ist ein Kreis in der Ebene $x = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = h(1,y,z) &= (1-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ &= 1 - 4 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + z^2 - 3 \\ \Leftrightarrow \;\; y^2 + z^2 &= 3 \, . \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis vom Radius $\tilde{R} = \sqrt{3}$ mit Mittelpunkt $\tilde{M} = (1,0,0)^T$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Offensichtlich gilt:

$$z^2 = 3 - y^2 \;\Rightarrow\; z = z(y) = \pm\sqrt{3 - y^2} \quad \text{für } |y| \leq \sqrt{3}$$
$$\text{(sowie } x(y) = 1\text{)}$$

Entsprechend:

$$y^2 = 3 - z^2 \;\Rightarrow\; y = y(z) = \pm\sqrt{3 - z^2} \quad \text{für } |z| \leq \sqrt{3}\, .$$
$$\text{(sowie } x(z) = 1\text{)}$$

Beachte: Wegen der $\pm$ erhalten wir in der Tat 4 Funktionen und damit die gesuchten 4 Stücke!

Genauer gilt: Die Schnittmenge wird parametrisiert durch folgende 4 Stücke als Graph jeweils einer Funktion von einer (geeigneten) Variablen:

$$\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -\sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,.$$