Block I: Integration und Taylorentwicklung in 1D

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int\limits_0^\pi \sin x \cos x \, dx$

b) $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int\limits_0^1 x^2 e^x dx$

Zur Selbstkontrolle: 0, $1 - \ln 2$, $e - 2$

Aufgabe 2: Was ist die Fläche des Einheitsdreiecks $\hat{T}^2$ und das Volumen des Einheitstetraeders $\hat{T}^3$?

Zur Selbstkontrolle: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar ist.

Zur Selbstkontrolle: $f''(x)$

Aufgabe 4: Geben Sie auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ eine Quadraturformel mit 3 Knoten mit den Werten für die Gewichte explizit an.

Zur Selbstkontrolle: Z.B. Knoten $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und Gewichte $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

Aufgabe 5: Wie berechnet man auf einem Dreieck mit Knoten p_0, p_1, p_2 die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0, \cdots, \lambda_2$ eines Punktes x?

Aufgabe 6: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

Zur Selbstkontrolle: $f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$

Aufgabe 7: Berechnen Sie die quadratische Lagrangeinterpolation der Funktion $\cos(x)$ für Knoten $\phi/2$, 0, $-\phi/2$ für festes $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zur Selbstkontrolle: $1 - (1 - \cos\frac{\phi}{2})\frac{4x^2}{\phi^2}$

Aufgabe 8: Geben Sie die Formel der Lagrangeinterpolation für allgemeine Knotenmenge an.

Aufgabe 9: Für welches m gilt $\frac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau} - u'(t - \tau/2) = O(\tau^m)$ im Fall glatter Funktionen u?

Zur Selbstkontrolle: $m = 2$

Block II: Komplexe Zahlen und Eigenwerte

Aufgabe 10: Was sagt der Fundamentalsatz der Algebra?

Aufgabe 11:

a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16$ in $\mathbb{C}$.

b) Berechnen Sie $(5+6i)(7-3i)$.

c) Berechnen Sie $\frac{2-2i}{|2-2i|}$.

d) Berechnen Sie $(\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Zur Selbstkontrolle: $2, 2i, -2, -2i$; $53+28i$; $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$; $\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)$

Aufgabe 12: Schreiben Sie $\sin^4 x$ und $\sin^2 x \cos^2 x$ als Linearkombination von $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$
Tipp: Verwenden Sie die Formeln

$$\sin(x) = \frac{1}{2\,i}\,(e^{i\,x} - e^{-i\,x}), \quad \cos(x) = \frac{1}{2}\,(e^{i\,x} + e^{-i\,x})$$

Zur Selbstkontrolle: $\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$; $\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$

Aufgabe 13: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, d.h. berechnen Sie eine orthogonal Matrix U und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = UDU^T$. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D.

Zur Selbstkontrolle: Eigenwerte 1, 2, 4

Aufgabe 14: Welche Kurve verbirgt sich hinter der Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy = 1\right\}?$$

Zur Selbstkontrolle: Halbachsen 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 15: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$,

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{Ax\cdot x}{x\cdot x}$.

Zur Selbstkontrolle: 12 und -1

Aufgabe 16: Sei A eine $n \times n$ Matrix mit bekannter Singulärwertzerlegung $A = UDV^T$.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Singulärwerte an, damit A invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie für diesen Fall die Singulärwertzerlegung von A^{-1}.

c) Für welche λ ist $A + \lambda I$ für symmetrisches A invertierbar?

d) Finden Sie dann die Singulärwertzerlegung von $(A+\lambda I)^{-1}$ im Fall, dass A symmetrisch ist.

Aufgabe 17: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A.
ja ☐ nein ☐

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A^TA.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A.
ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind.
ja ☐ nein ☐

Zur Selbstkontrolle: J, N, J, N, N, J

Aufgabe 18: Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

Aufgabe 19: Wie testet man, ob eine Zahl λ Eigenwert einer quadratischen Matrix A ist?

Aufgabe 20: Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Block III: Differentialgleichungen und Integration im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 21: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t), \qquad & x_1(0) &= -1, \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t), \qquad & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp At$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zur Selbstkontrolle: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - 3e^{3t} \\ e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix}$

Aufgabe 22: Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = 5y(t) + 3$ mit $y(0) = 2$ an.

Zur Selbstkontrolle: $\frac{13}{5}e^{5t} - \frac{3}{5}$

Aufgabe 23: Man löse die Differentialgleichung

a) $\dot{x} = \frac{1}{\sin(x)}$, $x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$

Zur Selbstkontrolle: $\arccos\left(\cos(x_0) - t\right)$, $\frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$

Aufgabe 24: Geben Sie für die Differentialgleichung $\dot{x} = \sin(x)$ mit $x(0) = x_0$ ein numerisches Verfahren zweiter Ordnung an.

Aufgabe 25: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Zur Selbstkontrolle: 2π

Aufgabe 26: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = \int_x^{x-y} \exp(-t^2(x + y))\, dt$$

Aufgabe 27: Wie differenziert man eine Funktion $f(t) = \int_0^t g(t,s)\mathrm{d}s$?

Aufgabe 28: Wie lautet der Satz von Gauß? Wenden Sie dieses Satz auf die Vektorfelder $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

Aufgabe 29: Berechnen Sie das Volumen des Torus, der durch Rotation des Dreieckes

$$\Delta = \{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x \leq 3, \; y = 0, \; 2 - x \leq z \leq x - 2 \, \}$$

um die z-Achse entsteht,

a) indem Sie die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers (aus der Vorlesung) benutzen.

b) indem Sie die Schnittflächen berechnen, die sich durch Schneiden des Torus mit Ebenen (im $\mathbb{R}^3$) ergeben, die senkrecht zur z-Achse sind, und über diese Schnittflächen (auf-) integrieren.

c) Berechnen Sie die Oberfläche dieses Torus.

Zur Selbstkontrolle: $\frac{16}{3}\pi$, $12(\sqrt{2}+1)\pi$

Aufgabe 30: Man berechne das Volumen des Körpers, der von den Flächen $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 1$ und $z = 0$ begrenzt wird.

Zur Selbstkontrolle: 2π

Aufgabe 31: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|} \, da = 2 \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\|x\|} \, dx \; .$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

Aufgabe 32: Existieren folgende Integrale (im Sinne des Kapitels über die Integration unbeschränkter Funktionen)?

a)

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

ja ☐ nein ☐

b)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ja ☐ nein ☐

c)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ja ☐ nein ☐

d)

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ja ☐ nein ☐

e)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\, dy\, dz}{1+x^2+y^2+z^2}$$

ja ☐ nein ☐

Zur Selbstkontrolle: J, J, N, J, N

Aufgabe 33: Wie lauter der Transformationssatz der Integralrechnung in mehreren Dimensionen?

Aufgabe 34: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

Zur Selbstkontrolle: $(0,\ 0,\ \frac{5}{4})$

Aufgabe 35: Welche Kurve Γ beschreibt die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2]$ gilt?
Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.

Zur Selbstkontrolle: $2\sqrt{4\pi^2+1}$

Aufgabe 36: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0,1)$ und $h \in [0,1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1,2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1,2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

Zur Selbstkontrolle: Metrik $\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Block IV: Orthogonale Abbildungen und Extremwertaufgaben im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 37: Wie sieht die Spiegelungsmatrix aus, die im QR-Verfahren zur Elimination der ersten Spalte der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ verwendet wird?

Aufgabe 38: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Zur Selbstkontrolle: $R = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 39: Wann ist eine Abbildung f orthogonal und wann ist eine quadratische Matrix A orthogonal?

Aufgabe 40: Gibt es neben Drehungen und Spiegelungen noch andere orthogonale Abbildungen im $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 41:

a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode 2π und Lipschitz-stetig. Geben Sie die Fourierdarstellung (einschließlich der Formeln zur Berechnung der Koeffizienten) von g an.

b) Angenommen die Funktion g wäre nun π periodisch. Gilt die Fourierdarstellung weiterhin?

c) Betrachten Sie nun die spezielle Funktion

$$f(x) = \sin^2(x).$$

Begründen Sie, warum für die Fourierkoeffizienten b_k aus der Vorlesung für alle $k \geq 1$ gilt $b_k = 0$.

d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und a_2 aus der Vorlesung für $f(x)$ (Tipp: Verwenden Sie zur Berechnugn von a_2: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Warum gilt dies?).

Zur Selbstkontrolle: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Aufgabe 42: Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $x = (2, 2)$ ein lokales Maximum hat.

Aufgabe 43: Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an?

Aufgabe 44: Was sagt der Satz von Schwarz aus über eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 45: Welche Aussagen sind richtig für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D = \{x \mid \|x\| < 1\}$?

a) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann gilt $\nabla f(a) = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Hat f ein globales Minimum an der Stelle a, dann ist die Hesse-Matrix $H(a)$ positiv definit. ja ☐ nein ☐

c) Gilt $\nabla f(a) = 0$ und ist $H(x)$ positiv definit für alle $x \in D$, dann hat f ein globales Minimum bei a. ja ☐ nein ☐

d) Gilt $\nabla f(a) = 0$ und hat $H(a)$ nur positive Eigenwerte, dann hat f bei a ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

e) Ist $H(x)$ positiv definit für alle $x \in D$, dann ist jedes lokale Minimum auch globales Minimum. ja ☐ nein ☐

Zur Selbstkontrolle: J, N, J, J, J

Aufgabe 46: Was ist der Gradient der Abbildung $f(x) = Ax \cdot x + b \cdot x$ für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $b, x \in \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 47: Was folgt aus dem Satz über implizite Funktionen bezüglich der Null-Niveaumenge der Funktion $f(x, y) = x^4 + y^4 - 1$?

Aufgabe 48: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Zur Selbstkontrolle: Sattelpunkt im Ursprung

Aufgabe 49: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
h(x, y, z) &:= (x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,, \\
g(x, y, z) &:= x - 1 = 0\,, \\
\mathbf{f}(x, y, z) &:= \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 50: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

Zur Selbstkontrolle: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Block V: Differentialgeometrie

Aufgabe 51: Wann ist eine glatte Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ eine geodätische Kurve auf einer glatten Hyperfläche $\mathcal{M}$?

Aufgabe 52: Geben Sie die Definition der Absolutkrümmung einer bogenlängenparametrisierten Kurve an?

Aufgabe 53: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s, v) \mapsto X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\gamma_1(s) := X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R},$$

$$\gamma_2(v) := X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi).$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

Zur Selbstkontrolle: Krümmungen $\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}$, 0