Aufgabe 1: Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0),(0,1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

LÖSUNG:

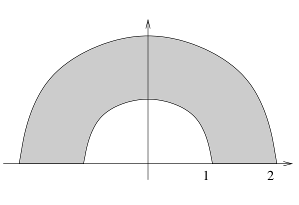
a) Der Flächeninhalt, bzw. das zweidimensionale Volumen des gegebenen Dreiecks D berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 1-x\,dx \\
&= x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \\
&= 1-\frac{1}{2}-0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Das Volumen des gegebenen Tetraeders T berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} 1\,dy\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} y\Big|_0^{1-x-z}\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1-x-z\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 x-\frac{1}{2}x^2 - zx\Big|_0^{1-z}\,dz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2}z^2\,dz \\
&= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1:



LÖSUNG: Polarkoordinaten: $1 \le r \le 2$ und $0 \le \phi \le \pi$
Berechnung der Masse:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi 1\, r\, d\phi\, dr = \pi \int_1^2 r\, dr = \frac{3}{2}\pi$$

Berechnung der y-Koordinate des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \sin\phi\, r\, d\phi\, dr \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\phi\, d\phi \\
&= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (-\cos\pi - (-\cos 0)) \\
&= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 2 = \frac{28}{9\pi} \approx 0{,}99
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes x_S offensichtlich 0, siehe auch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \cos\phi\, r\, d\phi\, dr \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \cos\phi\, d\phi \\
&= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (\sin\pi - \sin 0) \\
&= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

LÖSUNG: Angenommen die Grundfläche des Kegels liegt in der x_1, x_2-Ebene und die Spitze zeigt nach oben, d.h. in Richtung der positiven x_3-Achse. Um den Schwerpunkt $x_s = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ dieses Kegels K berechnen zu können, müssen wir als erstes seine Masse M_K berechnen. Dies geschieht mit Hilfe von Zylinderkoordinaten, wobei der Radius in Abhängigkeit von der Höhe angegeben werden muss.

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K dx \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5}z \right)^2 d\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 \int_0^{2\pi} 1 - \frac{2}{5}z + \frac{1}{25}z^2\, d\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 2\pi \left(1 - \frac{2}{5}z + \frac{1}{25}z^2 \right) dz \\
&= \pi \left(z - \frac{1}{5}z^2 + \frac{z^3}{75} \right) \Bigg|_0^5 \\
&= \pi \left(5 - 5 + \frac{5}{3} \right) \\
&= \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}$$

Anschließend berechnen wir komponentenweise, unter Benutzung der Zylinderkoordinaten, den Schwerpunkt.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_1\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\,(r\cos\varphi)\;dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{1-\frac{1}{5}z} r^2 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\right)}_{=0} dr\,dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da der Kegel achsensymmetrisch zur x_3-Achse ist, gilt

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 = 0.$$

Wir müssen also nur noch die dritte Komponente des Schwerpunktes berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_3\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{5}z} rz\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\frac{2\pi}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,dz \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 z-\frac{2}{5}z^2+\frac{z^3}{25}\,dz \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{15}z^3+\frac{z^4}{100}\right)\Bigg|_0^5 \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{25}{2}-\frac{50}{3}+\frac{25}{4}\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes lauten also

$$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Symmetrieachse in der Höhe $\frac{5}{4}$ über dem Boden.

Aufgabe 4: Wir betrachten ein Rohr

$$R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in [0,10] \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \right\},$$

bei dem das Wandmaterial die Dichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{z+4}{x^2+y^2}$$

hat. Berechnen Sie die Masse des Rohres

$$\int_R \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Lösung: Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und $r^2 = x^2 + y^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_R &= \int_R \rho(r(x,y,z))\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_R \frac{z+4}{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^{10} \int_0^{2\pi} \int_1^{\frac{6}{5}} \frac{z+4}{r^2}\, r\; dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^{10} z + 4\, dz \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_1^{\frac{6}{5}} r^{-1}\, dr \\
&= \left[\tfrac{1}{2} z^2 + 4z\right]_0^{10} \; 2\pi \; [\ln r]_1^{\frac{6}{5}} \\
&= (50+40)\, 2\pi \; \ln \tfrac{6}{5} = 180\pi \ln \tfrac{6}{5}
\end{aligned}$$