Aufgabe 5: Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Dichteverteilung in der Erde: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $6 \cdot 10^6$ (in Metern) um den Ursprung. K habe die Dichte (in $\mathrm{kg/m^3}$)

$$\rho(x) = \begin{cases} 12 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{1 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| \leq 3 \cdot 10^6, \\ 6 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{3 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| > 3 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse von K.

Aufgabe 6:

a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z-Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{ (x, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ um die z-Achse.
Tipp: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.
Es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotatiosellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, a^2$$

Aufgabe 7: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10},\ t \in [0, T]$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.

b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.

d) Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \to \infty$.

Aufgabe 8: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right] \to \mathbb{R}^2, \ \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{0{,}13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \to \mathbb{R}^2, \ \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].