Aufgabe 5: Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Dichteverteilung in der Erde: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $6 \cdot 10^6$ (in Metern) um den Ursprung. K habe die Dichte (in kg/m^3)

$$\rho(x) = \begin{cases} 12 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{1 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| \leq 3 \cdot 10^6, \\ 6 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{3 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| > 3 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse von K.

Lösung: Unter Verwendung von Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K \rho(r(x))\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{6\cdot 10^6} \rho(r)\, r^2 \sin\vartheta \; dr\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \left(\int_0^{3\cdot 10^6} 12 \cdot 10^3 r^2 - 10^{-3} r^3 \, dr + \int_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6} 6 \cdot 10^3 r^2 - \tfrac{1}{3} 10^{-3} r^3 \, dr \right) \\
&= 2\pi(-\cos\pi + \cos 0) \left(4 \cdot 10^3 r^3 - \tfrac{1}{4} 10^{-3} r^4 \Big|_0^{3\cdot 10^6} + 2 \cdot 10^3 r^3 - \tfrac{1}{12} 10^{-3} r^4 \Big|_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6} \right) \\
&= 4\pi \left(108 \cdot 10^{21} - \tfrac{81}{4} \cdot 10^{21} + 432 \cdot 10^{21} - 108 \cdot 10^{21} - 54 \cdot 10^{21} + \tfrac{27}{4} \cdot 10^{21}\right) \\
&= 4\pi \tfrac{364}{2} \cdot 10^{21} = 1458\pi \cdot 10^{21} \approx 4{,}58 \cdot 10^{24}
\end{aligned}$$

Die Masse der Erde beträgt tatsächlich ungefähr $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Das Modell ist offensichtlich stark vereinfacht.

Aufgabe 6:

a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z-Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{(x,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\right\}$ um die z-Achse.
Tipp: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.
Es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotatiosellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, a^2$$

Lösung:

a) Nach Vorlesung ist $\Theta_L = \frac{8}{15}\pi R^5$. Das Volumen einer Kugel ist $\frac{4}{3}\pi R^3$. Wegen $\rho \equiv 1$ ist dies auch die Masse. Also gilt

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi R^3\, R^2 = \tfrac{2}{5}\, M\, R^2$$

b) Die Transformation $g(x,y,z) = (ax, ay, bz)$ bildet die Einheitskugel K_1 auf das gegebene Rotationsellipsoid E ab, also $g(K_1) = E$. Hierzu ist $\det Dg(x,y,z) = a^2 b$. Zur Integration über die Einheitskugel werden Kugelkoordinaten verwendet.

$$
\begin{aligned}
\Theta_L &= \int_E d_L^2(x,y)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_E x^2 + y^2\,dx\,dy\,dz \\
&\quad \text{(Pythagoras: Abstand eines Punktes in der } x,y\text{-Ebene vom Ursprung)} \\
&= \int_{K_1} \left((a\bar{x})^2 + (a\bar{y})^2\right)\, a^2 b\; d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z} \\
&= a^4 b \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin\vartheta)^2\, r^2 \sin\vartheta\; d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&\quad \text{(Abstand von der } z\text{-Achse hängt jetzt von } r \text{ und } \vartheta \text{ ab)} \\
&= a^4 b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4\,dr \int_0^\pi \sin^3\vartheta\,d\vartheta \\
&= a^4 b\, 2\pi\, \frac{1}{5}\, \frac{1}{4} \int_0^\pi 3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta\,d\vartheta \\
&= a^4 b\, \pi\, \tfrac{1}{10} \left[-3\cos\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta\right]_0^\pi d\vartheta \\
&= a^4 b\, \pi\, \tfrac{1}{10} \left(3 - \tfrac{1}{3} + 3 - \tfrac{1}{3}\right) \\
&= a^4 b\, \pi\, \tfrac{1}{10}\, \tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{15} a^4 b \pi
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Im Falle der Kugel in Teil a) ist $a = b = R$ und man erhält die bereits bekannte Formel.

c) Das Volumen des Rotationsellipsoids (und wegen $\rho \equiv 1$ auch die Masse) ist $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt sich sofort

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi a^2 b\, a^2 = \tfrac{2}{5}\, M\, a^2$$

Aufgabe 7: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10},\ t \in [0, T]$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.

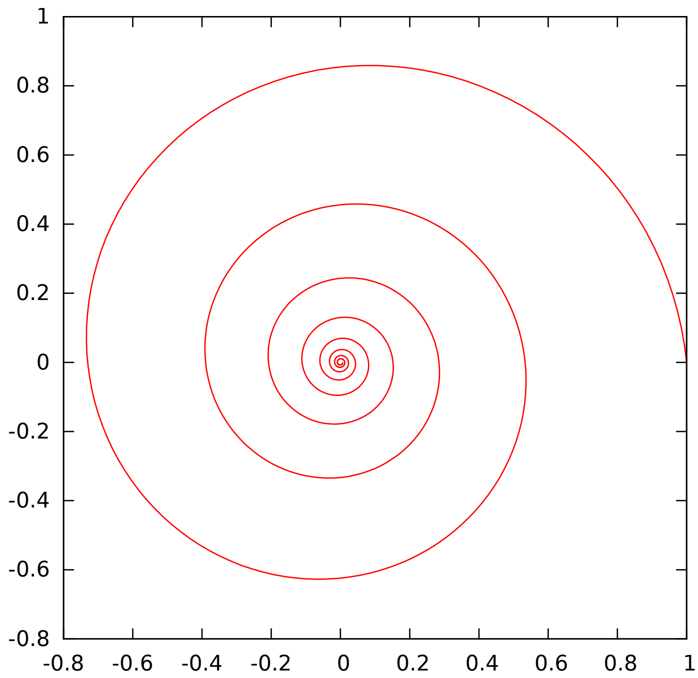
b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.

d) Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \to \infty$.

LÖSUNG:

a) Es handelt sich um die sogenannte *logarithmische Spirale*:



b) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t}\cos(t) + e^{\alpha t} - \sin(t) \\ \alpha e^{\alpha t}\sin(t) + e^{\alpha t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= e^{\alpha t}\sqrt{(\alpha\cos(t) - \sin(t))^2 + (\alpha\sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2\cos^2(t) + \alpha^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} l(T) &= \int_0^T \|\dot{\gamma}(s)\|\, ds = \sqrt{\alpha^2+1}| \int_0^T e^{\alpha s}\, ds \\ &= \sqrt{\alpha^2+1}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha s}\right]_0^T \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right) \\ &= -\sqrt{101}\left(e^{-\frac{T}{10}} - 1\right) \end{aligned}$$

d)

$$\lim_{T\to\infty} l(T) = \sqrt{101}$$

Aufgabe 8: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \ \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{0{,}13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \to \mathbb{R}^2, \ \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].

LÖSUNG:

a) $\|B - A\| = d$

b)

$$\bar\gamma\left(-\frac{d}{2}\right)=A,\quad \bar\gamma\left(\frac{d}{2}\right)=B,\quad \bar\gamma \text{ stetig}$$

$$\|\dot{\bar\gamma}(t)\|=1$$

$$\int_{\bar\Gamma} 1\,dl=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 1\cdot 1\,dt=\frac{d}{2}-\left(-\frac{d}{2}\right)=d$$

Es handelt sich um die Gerade durch A und B.

c)

$$\begin{aligned}\tilde\gamma(-T)&=M+R\begin{pmatrix}-\sin T\\ \sqrt{1-\sin^2 T}\end{pmatrix}\\&=M+R\begin{pmatrix}-\frac{d}{2R}\\ \frac{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}}{R}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0-R\frac{d}{2R}\\ -\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}+R\frac{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}}{R}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\frac{d}{2}\\ 0\end{pmatrix}=A,\end{aligned}$$

analog ergibt sich $\tilde\gamma(T)=B$ (einziger Unterschied: $+\sin T$ im ersten Schritt).

$$\|\dot{\tilde\gamma}(t)\|=\sqrt{0+R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}=R$$

$$\int_{\tilde\Gamma} 1\,dl=\int_{-T}^{T} 1\cdot R\,dt=2R\arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Es handelt sich um einen Kreisbogen mit Radius R von A nach B (Lichtweg bei genügend großer Entfernung von der Erdoberfläche).

d) ...

e) $\tilde\Gamma$ ist länger.

Die Längendifferenz ist

$$2R\arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)-d.$$

Für $d=100$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73\cdot 10^{-11}$ [m] (17 Pikometer).

Für $d=1000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73\cdot 10^{-8}$ [m] (17 Nanometer).

Für $d=10000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73\cdot 10^{-5}$ [m] (17 Mikrometer).

Der Abstand $\|\tilde\gamma(0)-\bar\gamma(0)\|=\tilde\gamma_2(0)=-\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}+R$ ist offensichtlich der maximale Abstand der beiden Kurven.

Für $d = 100$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-5}$ [m] (25 Mikrometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-3}$ [m] (2,5 Millimeter).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-1}$ [m] (25 Zentimeter).

f)

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arcsin''(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} \\
\arcsin'''(x) &= \frac{2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}^5} \\
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin'(0) &= 1 \\
\arcsin''(0) &= 0 \\
\arcsin'''(0) &= 1 \\
\arcsin(x) &= 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) \\
L(d) &= 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) \\
&= 2R\left(\frac{d}{2R} + \frac{1}{6}\frac{d^3}{8R^3} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)\right) \\
&= d + \frac{1}{24}\frac{d^3}{R^2} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right) \\
\Rightarrow L(d) - d &= \frac{1}{24R^2} \cdot d^3 + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)
\end{aligned}$$

Es ergeben sich auf 5 signifikante Stellen die selben Werte wie oben.

Insbesondere sieht man hier direkt, dass sich bei zehnfacher Länge die tausendfache Differenz ergibt (d^3), mit $\frac{1}{24R^2} \approx 17 \cdot 10^{-18}$ erhält man leicht im Kopf die oben in Klammern angebenen Abschätzungen.