Aufgabe 9: Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60°N$, $30°O$) mit Anchorage in Alaska ($60°N$, $150°W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

Aufgabe 10: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, 1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t, h_0) \qquad \text{für festes } h_0 \in (0, 1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0, 1] \to \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\phi_0, t) \qquad \text{für festes } \phi_0 \in [0, 2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

Aufgabe 11: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

Aufgabe 12: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch die Abbildung $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\, \cos v \\ (R + r\cos w)\, \sin v \\ r\, \sin w \end{pmatrix}$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).

a) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{S}$ (Tipp: Betrachten Sie die Kurven $h(t) = x(a, t)$ und $v(t) = x(t, a)$ für $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v, w) \in \mathbb{R}^{2,2}$.

c) Berechnen Sie die Normale $N(v, w) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0, 1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

$$c : \xi \mapsto (\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\, \xi)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$.

d) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.