

Aufgabe 17: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.

Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{4}$$

Aufgabe 18: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos 2t \\ 2 \sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.

Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

Aufgabe 19: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in \mathbb{R}^2 mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 \, d\varphi.$$

Aufgabe 20: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|} \, da = 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\|x\|} \, dx.$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.