

Aufgabe 17: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.

Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{4}$$

LÖSUNG:

- a) Um das Integral auf direktem Weg zu berechnen, geben wir als erstes eine Parametrisierung von ∂K als Kurve an:

$$\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Bei der Kurve handelt es sich um eine geschlossene Kreiskurve um den Ursprung mit Radius 1. Der Normalenvektor an die Kurve ist der Vektor $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{4} \right) dt \\ &= \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

- b) Alternativ kann man das Integral auch mit Hilfe des Satz von Gauß berechnen. Danach gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} dx \, dy \\ &= \int_K (3x^2 + 3y^2) dx \, dy \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3(r \cos \varphi)^2 + 3(r \sin \varphi)^2) r \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3 \, d\varphi \, dr \\
 &= 6\pi \int_0^1 r^3 \, dr \\
 &= \frac{3}{2}\pi
 \end{aligned}$$

Aufgabe 18: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos 2t \\ 2 \sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ eingeschlossen wird.

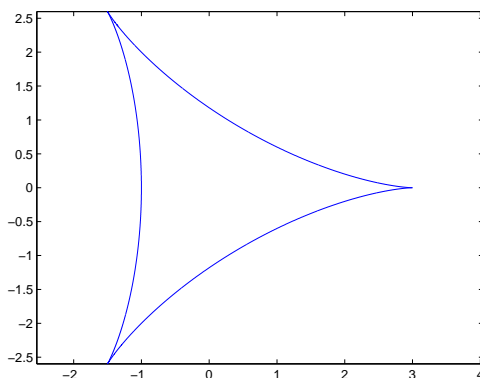
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

LÖSUNG: Die Kurve beschreibt eine sog. Hypozykloide:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos 2t \\ 2 \sin t - \sin 2t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gesucht: $\text{Vol}_2(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx$

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}_2(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 \, dx = \int_{\Omega} \text{div } F \, dx \, dy \quad \text{mit } \text{div } F = 1, \text{ z.B. } F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \int_{\Gamma} F \cdot N \, dl \quad \text{nach Gauß, wobei } N \text{ äußere Normale} \\
 &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt, \quad N = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t) \dot{\gamma}_2(t) \, dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 4 \cos t \cos 2t + 2 \cos t \cos 2t - 2 \cos^2 2t) dt \\
\cos t &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}, \\
\text{also } \cos t \cos 2t &= \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t) \\
\Rightarrow \text{Vol}_2(\Omega) &= \int_0^{2\pi} [(2 \cos 2t + 2) - (\cos 3t + \cos t) - (\cos 4t + 1)] dt \\
&= 0 + 4\pi - 0 - 0 - 0 - 2\pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 19: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in \mathbb{R}^2 mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 d\varphi.$$

LÖSUNG: Kurve $\Gamma : \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\varphi) \\ \gamma_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$

Normale $N = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi)\|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(\varphi) \\ -\gamma_1'(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi)\|} \begin{pmatrix} r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \\ -r'(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$

Sei Ω die von Γ eingeschlossene Fläche.

Gesucht: $\text{Vol}_2(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx dy$

Setze $F(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt $\text{div } F = 1$ und der Gauß'sche Integralsatz liefert:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} 1 dx dy &= \int_{\Omega} \text{div } F dx dy \\
&= \int_{\Gamma} F \cdot N dl \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\gamma'(\varphi)\|} \begin{pmatrix} r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \\ -r'(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix} \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (r(\varphi) \cos \varphi (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi) \\
&\quad + r(\varphi) \sin \varphi (-r'(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi) \sin \varphi)) d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi) \cos^2 \varphi + r^2(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

Aufgabe 20: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|} da = 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\|x\|} dx .$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

LÖSUNG: Nach dem Gauß'schen Integralsatz im \mathbb{R}^3 gilt:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot N da = \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx$$

N = äußere Normale von $\partial\Omega$.

Wähle hier $F(x) := \frac{x}{\|x\|}$ und zeige: $\operatorname{div} F = \frac{2}{\|x\|}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{\|x\|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i \cdot x_i}{\|x\|^3} \right] \\ &= \frac{3}{\|x\|} - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \\ &= \frac{3}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} \\ &= \frac{2}{\|x\|} \end{aligned}$$