

**Aufgabe 29:** Bestimmen Sie  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  so, daß

$$f(x, y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.

Berechnen Sie den Wert der Funktion  $f$  an dieser Stelle.

**Aufgabe 30:** Orthonormalisieren Sie im  $\mathbb{R}^4$  die Vektoren:

$$a_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad a_2 = (1, 0, 1, 0)^T \quad a_3 = (0, 0, 1, 0)^T$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^4$ .

**Aufgabe 31:** Betrachten Sie die von den Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$  aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form  $\{x \mid x \cdot n = d\}$  an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von  $n$  erneut die Projektion des Punktes  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  auf diese Ebene.

**Aufgabe 32: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen**

Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$  Matrix mit  $A^T = -A$ , d. h.  $A$  ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

- a) Die Spur von  $A$ ,  $\text{tr } A$ , ist gleich null.      ja       nein
- b) Es gilt  $\det A = 0$  für  $n = 2$ .      ja       nein
- c) Es gilt  $\det A = 0$  für  $n = 3$ .      ja       nein
- d) Es gilt  $Ax \cdot x = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .      ja       nein
- e) Wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $A$  ist, dann folgt  $\lambda = 0$ .  
ja       nein
- f)  $\exp A$  ist eine orthogonale Matrix.      ja       nein
- g) Es gilt  $\det(\exp A) = 1$ .      ja       nein

**Aufgabe 33: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion**

Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt und  $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$  ein Unterraum, wobei  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

- a) Wenn  $v \in V$  und  $v \cdot u_i = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ , dann ist  $v = 0$ .  
ja       nein
- b) Die orthogonale Projektion  $Pv \in U$  eines Vektors  $v \in V$  ist eindeutig bestimmt und es gilt:  $Pv = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) u_i$ .  
ja       nein
- c) Für  $v, w \in V$  gilt:  $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$ .  
ja       nein
- d) Wenn  $v \in V$ , dann gilt:  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$ .  
ja       nein
- e) Wenn  $v \in U$ , dann gilt:  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$ .  
ja       nein