Aufgabe 29: Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ so, daß

$$f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.

Berechnen Sie den Wert der Funktion f an dieser Stelle.

LÖSUNG: Verwende das QR-Verfahren für Ausgleichsprobleme mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\alpha_1 = -\text{sign}(1) \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = -\sqrt{1+4+4} = -\sqrt{9} = -3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} + \frac{1}{\alpha_1 v_{11}} v_1 v_1^T = \mathbb{1} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 18 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

$$b^{(2)} = Q^{(1)} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 90 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} - \frac{15}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\alpha_2 = -\text{sign}(3) \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = -\sqrt{9+16} = -\sqrt{25} = -5$$

$$
\begin{aligned}
v_2 \quad &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3-(-5) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} \quad &= \mathbb{1} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} (0+24+16) = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
Q^{(2)} A^{(2)} &= \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{(3)} \\
b^{(3)} = Q^{(2)} b^{(2)} &= \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} (0-120+120) = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit $f(x, y)$ minimal wird, muss (x, y)

$$
\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \end{pmatrix}
$$

lösen. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich $y = 3$ und $x = 2$.

Für das Residuum ergibt sich $f(2, 3) = \|(30)\|^2 = 900$.

Aufgabe 30: Orthonormalisieren Sie im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$
a_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad a_2 = (1, 0, 1, 0)^T \quad a_3 = (0, 0, 1, 0)^T
$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Lösung: Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $v_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$
- $\tilde{v}_2 = a_2 - (a_2.v_1)v_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$
  $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$
- $\tilde{v}_3 = a_3 - (a_3.v_2)v_2 - (a_3.v_1)v_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$
  $v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)^T$

Sei $v_4 = (0, 0, 0, 1)^T$, denn

$$
\|v_4\| = 1, \quad v_1.v_4 = v_2.v_4 = v_3.v_4 = 0
$$

und v_1, v_2, v_3, v_4 ist eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 31: Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

LÖSUNG:

a)

$$v_1 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Die Projektion des Punktes p auf die Ebene berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}(p \cdot v_1)v_1 + (p \cdot v_2)v_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c)

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{1}{\|\tilde{n}\|}\tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{32}} \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Ebene lässt sich also schreiben als

$$\left\{ x \,\middle|\, x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

d)

$$\begin{aligned} p - (p \cdot n)n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 32: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja □ nein □

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja □ nein □

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja □ nein □

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja □ nein □

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$. ja □ nein □

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja □ nein □

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja □ nein □

Lösung: Die Antworten lauten:

a) Ja, denn alle Diagonaleinträge von A sind Null.

b) Nein! Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Ja. Man berechnet für eine beliebige schiefsymmetrische 3×3-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = 0 + abc + (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) - 0 - 0 - 0 = 0.$$

d) Ja. $Ax \cdot x = x \cdot A^T x = x \cdot (-A)x = -x \cdot Ax = -Ax \cdot x \Rightarrow 2Ax \cdot x = 0$.

e) Ja. $Ax \cdot x = 0$ bedeutet, dass Ax stets senkrecht auf x steht. Also kann Ax kein Vielfaches von x sein, ausser das Nullfache.

Formal: Sei $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$. Dann $0 = Ax \cdot x = \lambda x \cdot x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda = 0$.

f) Ja, siehe Vorlesung.

g) Ja. $\det(\exp(tA))$ ist stetig (differenzierbar) in t und kann für beliebige t nur die Werte 1 und -1 annehmen, da $\exp(tA)$ stets orthogonal ist. Da die Werte dazwischen nicht möglich sind, muss die (stetige) Funktion für alle t konstant sein. Da

$$\det(\exp(0A)) = \det(\exp(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1,$$

muss auch gelten

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(1A)) = 1.$$

Aufgabe 33: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja $\square$ nein $\square$

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)u_i$.
ja $\square$ nein $\square$

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja $\square$ nein $\square$

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja $\square$ nein $\square$

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja $\square$ nein $\square$

LÖSUNG: Die Antworten lauten: a) Nein! Bsp. $v = e_3$, $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$ b) Ja! c) Ja! Ausmultiplizieren $u_i \cdot u_j = 0$. d) Nein! Siehe a) e) Ja! Wegen c) $v = w = u$, dann $Pv = Pw = u$.