Aufgabe 34: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 35:

a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode 2π und Lipschitz-stetig. Geben Sie die Fourierdarstellung (einschließlich der Formeln zur Berechnung der Koeffizienten) von g an.

b) Angenommen die Funktion g wäre nun π periodisch. Gilt die Fourierdarstellung weiterhin?

c) Betrachten Sie nun die spezielle Funktion

$$f(x) = \sin^2(x).$$

Begründen Sie, warum für die Fourierkoeffizienten b_k aus der Vorlesung für alle $k \geq 1$ gilt $b_k = 0$.

d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1 und a_2 aus der Vorlesung für $f(x)$ (Tipp: Verwenden Sie zur Berechnugn von a_2: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Warum gilt dies?).

Aufgabe 36: Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2 + y^3$ besitzt im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja $\square$ nein $\square$

b) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Extremum. ja $\square$ nein $\square$

c) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja $\square$ nein $\square$

d) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum. ja $\square$ nein $\square$

e) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein globales Minimum. ja $\square$ nein $\square$