**Aufgabe 34:** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0,\pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x-2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

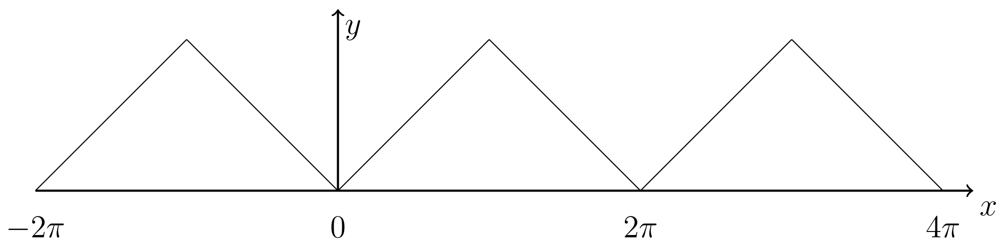
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

LÖSUNG:

a) 


b) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}xdx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2 - \frac{1}{\pi}xdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}x^2\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[2x - \frac{1}{2\pi}x^2\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\pi^2 - 0 + \frac{2}{\pi}2\pi - \frac{2}{\pi}\pi - \frac{1}{2\pi^2}(2\pi)^2 + \frac{1}{2\pi^2}(\pi)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\cos(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}(2-\frac{1}{k\pi}y)\cos(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{2}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}\cos(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{2k\pi} y\cos(y)dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y)+\cos(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y)+\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}-(0\cdot\sin(0)+\underbrace{\cos(0)}_{=1})\right] + \frac{2}{k\pi}\left[\underbrace{\sin(2k\pi)-\sin(k\pi)}_{=0}\right] \\
& - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[2k\pi\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}-(k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k})\right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right] - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}(-1+(-1)^k).
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{4}{\pi^2}, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= -\frac{4}{9\pi^2}, \\
a_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur $y$-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

Alternativ können wir für $k \in \mathbb{Z}$ aber auch die $b_k$ folgendermaßen berechnen

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi} \int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\sin(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y\sin(y)dy + \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} (2 - \frac{1}{k\pi}y)\sin(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} y\sin(y)dy + \frac{2}{k\pi} \int_{k\pi}^{2k\pi} \sin(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{2k\pi} y\sin(y)dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-y\cos(y) + \sin(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[-\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-y\cos(y) + \sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[ -k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - (0\cdot\cos(0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0}) \right] + \frac{2}{k\pi} \left[ -\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} \right] \\
& - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[ -2k\pi \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - (-k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}) \right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-k\pi(-1)^k\right] - \frac{1}{k^2\pi^2} \left[-2k\pi + k\pi(-1)^k\right] + \frac{2}{k\pi} \left[-1 + (-1)^k\right] \\
=& \frac{1}{k\pi} \left[-(-1)^k + 2 - (-1)^k - 2 + 2(-1)^k\right] = 0.
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 35:**

a) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode $2\pi$ und Lipschitz-stetig. Geben Sie die Fourierdarstellung (einschließlich der Formeln zur Berechnung der Koeffizienten) von $g$ an.

b) Angenommen die Funktion $g$ wäre nun $\pi$ periodisch. Gilt die Fourierdarstellung weiterhin?

c) Betrachten Sie nun die spezielle Funktion

$$f(x) = \sin^2(x).$$

Begründen Sie, warum für die Fourierkoeffizienten $b_k$ aus der Vorlesung für alle $k \geq 1$ gilt $b_k = 0$.

d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $a_0, a_1$ und $a_2$ aus der Vorlesung für $f(x)$ (Tipp: Verwenden Sie zur Berechnugn von $a_2$: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Warum gilt dies?).

LÖSUNG:

a) Die Fourierdarstellung von $g$ lautet:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(x)dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(x)\sin(kx)dx.$$

b) Da $g$ dann $\pi$ periodisch ist, ist $g$ auch $2\pi$ periodisch und damit gilt die Fourierdarstellung noch immer.

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

   i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$
   ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur $y$-Achse
   iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung
   iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung
   v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

d) Zunaechst stellen wir durch partielle Integration für $a_0$ fest

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin(x)\cdot\sin(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}[-\sin(x)\cdot\cos(x)]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} -\cos(x)\cdot\cos(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}[-\sin(x)\cdot\cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} 1-\sin^2(x)dx.\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}[-\sin(x)\cdot\cos(x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} dx = 1.$$

Kommen wir nun zu $a_1$. Hier gilt

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)dx \underbrace{=}_{y=\sin(x)} \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)} y^2dy = 0.$$

Kommen wir nun zu $a_2$. Hier gilt

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(2x)dx \underbrace{=}_{\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x) - \cos^2(2x)dx$$

$$\underbrace{=}_{\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x) - (\frac{1}{2}(1+\cos(4x))dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Hierbei gilt:

$$1-\cos(2x) = 1-(\cos^2(x)-\sin^2(x)) = 1-(1-\sin^2(x)-\sin^2(x)) = 2\sin^2(x).$$

**Aufgabe 36:** Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2+y^3$ besitzt im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja □ nein □

b) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2+y^3$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Extremum. ja □ nein □

c) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2+y^2-y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja □ nein □

d) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2+y^2-y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum. ja □ nein □

e) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2+y^2-y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein globales Minimum. ja □ nein □

LÖSUNG: Die Antworten lauten: a) Ja! b) Nein! c) Ja! d) Ja! e) Nein!
Für a) und b) beachtet man dazu $\text{grad} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, woraus sich ergibt, dass $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von $f_1$ ist. Wegen $D^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ und $D^2 f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_1(0,0)$ positiv semidefinit ist, aber für diesen Fall gilt kein allgemeines Kriterium. Aber $f_1(0,t) = t^3$ zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt, da $t^3$ negativ ist für $t<0$, $=0$ für $t=0$ und positiv ist für $t>0$.
Für c), d) und e) beachtet man $\text{grad} f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y-4y^3 \end{pmatrix}$, woran man erkennt, dass $(0,0)$ kritischer Punkt von $f_2$ ist. Wegen $D^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-12y^2 \end{pmatrix}$ und $D^2 f_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_2(0,0)$ positiv definit ist, und demnach ein (lokales) Minimum bei $(0,0)$ liegt mit dem Wert $f_2(0,0) = 0$. Aber es gilt auch $f_2(0,\pm 1) = 0$ und $f_2(0,\pm 2) = -12$. Dies zeigt, dass es sich nicht um ein globales Minimum handelt.