

Aufgabe 37: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

LÖSUNG: Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 6x - 5y, \\ f_y(x, y) &= -5x - 4y. \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0.$$

\Rightarrow Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von \mathbf{A} : Die charakteristische Gleichung von \mathbf{A} lautet

$$\begin{aligned} (6 - \lambda)(-4 - \lambda) - 25 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49, \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 &= 50 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50}. \end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben, liegt in $(0, 0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0, 0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0, 0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned}f(0,0) &= 3, \\f(t,0) &= 3t^2 + 3 > 3, \\f(0,t) &= -2t^2 + 3 < 3,\end{aligned}$$

wobei $t \neq 0$ sei.

Aufgabe 38: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}\text{grad} f_\alpha(x,y) &= \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4 + \alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y(y^3 + \alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ und } x = 0) \text{ oder } (y = -\alpha \text{ und } x = \alpha) \\ P_0 = (0,0), P_1 = (\alpha, -\alpha) : D^2 f_\alpha(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{Für } P_0 = (0,0) \text{ gilt } D^2 f_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0,0)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow (\lambda + 3\alpha)(\lambda - 3\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Für } \alpha \neq 0 \text{ gilt: } \lambda_1 \lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0,0)$ indefinit und $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

$$\text{Für } P_1 = (\alpha, -\alpha) \text{ gilt } D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$(6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 6\alpha - \lambda = \pm\sqrt{9\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = 9\alpha$$

$\Rightarrow D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha > 0$ und negativ definit für $\alpha < 0$.
 D.h. $(\alpha, -\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \alpha^3 + \alpha^3 - 3\alpha^3 = -\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha > 0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha < 0$. (Für $\alpha = 0$ siehe oben.)

b)

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 3y^2 - 12 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_0 = (-1, -2), P_1 = (-1, 2), P_2(1, -2), P_3(1, 2)$$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

i) Für $P_0 = (-1, -2)$ gilt: $D^2 f(-1, -2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

$f(-1, -2) = -1 - 8 + 3 + 24 + 20 = 38 \Rightarrow$ (lokales) Maximum.

ii) Für $P_1 = (-1, 2)$ gilt: $D^2 f(-1, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

$f(-1, 2) = -1 + 8 + 3 - 24 + 20 = 6 \Rightarrow$ Sattelpunkt.

Für $P_2 = (1, -2)$ gilt: $D^2 f(1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist indefinit,

$f(1, -2) = 1 - 8 - 3 + 24 + 20 = 34$

\Rightarrow Sattelpunkt.

iii) Für $P_3 = (1, 2)$ gilt: $D^2 f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

$f(1, 2) = 1 + 8 - 3 - 24 + 20 = 2$

\Rightarrow (lokales) Minimum.

Aufgabe 39: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f .

LÖSUNG: Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x, y) mit $\nabla f(x, y) = 0$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cos(y) \\ -\sin(x) \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}, \text{ oder } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ oder } y = \frac{\pi}{2}, \text{ oder } y = \frac{3\pi}{2} \\ x = 0, \text{ oder } x = \pi, \text{ oder } y = 0, \text{ oder } y = \pi \end{cases}$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\cos(x) \sin(y) & -\sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_1 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_2 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_3 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_4 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_5 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_6 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_7 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_8 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Aufgabe 40: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

- Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.
- Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.
- Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.
- Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.
- Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.

LÖSUNG:

a)

$$x_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cos \varphi_0 \\ r_0 \sin \varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \|x_0 - x\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} r_0 \cos \varphi_0 - \cos \varphi \\ r_0 \sin \varphi_0 - \sin \varphi \\ z_0 - z \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (r_0 \cos \varphi_0 - \cos \varphi)^2 + (r_0 \sin \varphi_0 - \sin \varphi)^2 + (z_0 - z)^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \partial_\varphi d(\varphi, z) &= 2(r_0 \cos \varphi_0 - \cos \varphi) \sin \varphi + 2(r_0 \sin \varphi_0 - \sin \varphi) (-\cos \varphi) \\ &= 2r_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi - 2r_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &= 2r_0 (\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi) \\ &= 2r_0 (\cos(-\varphi_0) \sin \varphi + \sin(-\varphi_0) \cos \varphi) \\ &= 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \partial_z d(\varphi, z) &= -2(z_0 - z) \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\nabla d(\varphi, z) = 0.$$

Für $r_0 \neq 0$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \varphi_0 \text{ oder } \varphi_0 + \pi \text{ und } z = z_0$$

$\Rightarrow (\varphi_0, z_0)$ und $(\varphi_0 + \pi, z_0)$ sind kritische Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

Im Fall $r_0 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2r_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \\ 2(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2(z - z_0) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = z_0$$

Kritische Punkte sind in diesem Fall also alle Punkte (φ, z_0) mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

d)

$$D^2 d(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 2r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) $r_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} D^2 d(\varphi_0, z_0) &= \begin{pmatrix} 2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \text{ist positiv definit} \Rightarrow \text{Minimum} \\ D^2 d(\varphi_0 + \pi, z_0) &= \begin{pmatrix} -2r_0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \text{ist indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{aligned}$$

Im Fall $r_0 \neq 0$ gilt

$$x_Z = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $r_0 = 0$ ist die Matrix D^2d positiv semidefinit, so dass wir keine allgemeine Aussage machen können. Allerdings gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} d(\varphi, z) &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + (z_0 - z)^2 \\ &= 1 + (z_0 - z)^2, \end{aligned}$$

d.h. der Abstand hängt nicht mehr von φ sondern nur noch von z ab. Da für $d(z) = d(\varphi, z)$ die zweite Ableitung $d''(z) = 2$ größer Null ist, handelt es sich bei allen kritischen Punkten um Minima. Es gibt in diesem Fall also nicht nur einen Punkt x_z , der auf dem Zylinder Z liegt und minimalen Abstand zum Punkt x_0 hat sondern eine Menge M_Z von Punkten, die alle auf Z liegen und minimalen Abstand zum Punkt x_0 haben.

$$M_Z = \{(\varphi, z_0) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$