

**Aufgabe 41:** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = -\sqrt{1 - x^2 + y^2 + z^2}$$

nach Taylor an der Stelle  $(0, 0, 0)$  bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- $f(0, 0, 0) = -1$

- $\text{grad } f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad } f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $D^2 f(x, y, z) = \frac{1}{(1-x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2-1-z^2 & yz \\ -xz & yz & x^2-y^2-1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D^2 f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $f(\xi, \eta, \zeta) = -1 + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) + O((\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2})$

**Aufgabe 42:** Entwickeln Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto e^{-\|x-x_0\|^2}$$

nach Taylor an der Stelle  $x = x_0$  bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- Zunächst sehen wir  $f(x_0) = e^{-\|x_0-x_0\|^2} = e^0 = 1$

- Berechnung des Gradienten:  $\text{grad } f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2}(x-x_0) \Rightarrow \text{grad } f(x_0) = \mathbf{0}$

- Berechnung der zweiten Ableitungen:  $D^2 f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2} \cdot \mathbb{1} + 4e^{-\|x-x_0\|^2}(x-x_0)(x-x_0)^T$

$$\Rightarrow D^2 f(x_0) = -2 \cdot \mathbb{1}$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= 1 + \frac{1}{2}(x_0 + \xi - x_0)^T (-2\mathbb{1})(x_0 + \xi - x_0) + O(\|\xi\|^3) \\ &= 1 - (\xi)^T (\mathbb{1})(\xi) + O(\|\xi\|^3) \\ &= 1 - \|\xi\|^2 + O(\|\xi\|^3) \end{aligned}$$

**Aufgabe 43:** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = \|x - a\|$  nach Taylor an der Stelle  $x_0$  bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

$$f(x) = \|x - a\| = ((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2)^{\frac{1}{2}}$$

setze  $x = x_0 + h, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + O(\|h\|^3)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x) &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)^T \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x - a\|} \cdot 2(x_1 - a_1), \dots, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x - a\|} \cdot 2(x_n - a_n) \right)^T \\ &= \left( \frac{x_1 - a_1}{\|x - a\|}, \dots, \frac{x_n - a_n}{\|x - a\|} \right)^T = \frac{1}{\|x - a\|} (x - a) \end{aligned}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(x_i - a_i)}{\|x - a\|} \\ &= \frac{1}{\|x - a\|} - \frac{(x_i - a_i)(x_i - a_i)}{\|x - a\|^3} \\ &= \frac{1}{\|x - a\|} - \frac{1}{\|x - a\|^3} (x_i - a_i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) &= \frac{1}{\|x - a\|} - \frac{1}{\|x - a\|^3} (x_i - a_i)^2 \\ i \neq j: \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(x_i - a_i)}{\|x - a\|} \\ &= -\frac{1}{\|x - a\|^3} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &= -\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{\|x - a\|^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{1}{\|x - a\|} \left( \mathbf{1} - \frac{(x - a)(x - a)^T}{\|x - a\|^2} \right)$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x_0 + h) = \|x_0 - a\| + \frac{(x_0 - a)}{\|x_0 - a\|} \cdot h + \frac{1}{2\|x_0 - a\|} \left( \mathbf{1} - \frac{(x_0 - a)(x_0 - a)^T}{\|x_0 - a\|^2} \right) h \cdot h + O(\|h\|^3)$$

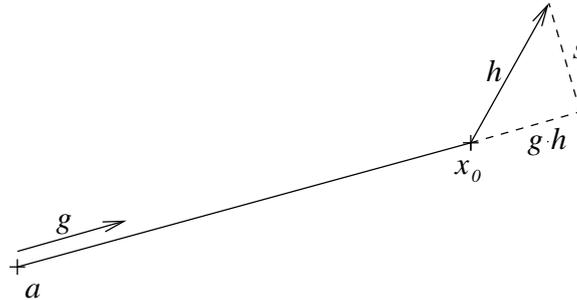
**Zusätzliche Erläuterung:** (Nicht Teil der Lösung!)

Mit der Bezeichnung  $g = \text{grad } f(x_0)$  erhalten wir

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + g \cdot h + \frac{1}{2\|x_0 - a\|} (\|h\|^2 - (g \cdot h)^2) + O(\|h\|^3).$$

Dabei ist offenbar  $\|g\| = 1$ , also ist  $g$  der Einheitsvektor, der von  $a$  in Richtung  $x_0$  zeigt. Der lineare Term (also die Approximation der Änderung in erster Ordnung) ist daher die Projektion von  $h$  auf die Gerade durch  $x_0$  und  $a$ . Hier spielt also nur der Anteil von  $h$  eine Rolle, der auf  $a$  zu oder von  $a$  weg zeigt, nicht der Anteil „seitwärts“. In ähnlicher Weise erklärt sich der quadratische Term: Mit  $s^2 = \|h\|^2 - (g \cdot h)^2$  ist  $s$  der „Seitwärts-Anteil“ von  $h$  (Pythagoras!). Der Term zweiter Ordnung berücksichtigt also die Änderung „seitwärts“.

Die Skalierung überlegt man sich beispielweise folgendermaßen: Mit  $a = (0, 0)^T$ ,  $x_0 = (1, 0)^T$  und  $h = (t, s)^T$  erhält man  $f(x_0 + h) = 1 + t + \frac{1}{2}s^2 + O(\|h\|^3)$ . Zu  $x_0 = (L, 0)^T$  erhält man die skalierte Gleichung  $\frac{f(x_0+h)}{L} = 1 + \frac{t}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{L}\right)^2 + O(\|h\|^3)$ . Multiplikation mit  $L = \|x_0 - a\|$  ergibt schließlich die obige Form.



**Aufgabe 44:** Bestimmen Sie für die Funktion

$$g(x, y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}, \quad 0 < r < R,$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle  $(R, 0)$  mit Restglied der Ordnung 3.

**Tipp:** Finden Sie eine Funktion  $h(\cdot)$ , so dass  $g(x, y) = h(d(x, y))$  mit  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

LÖSUNG:  $g(x, y) = h(d(x, y))$  mit  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $h(\rho) = \sqrt{r^2 - (\rho - R)^2} \Rightarrow$

$$g_x(x, y) = h'(d(x, y)) d_x(x, y)$$

$$g_y(x, y) = h'(d(x, y)) d_y(x, y)$$

$$g_{xx}(x, y) = h''(d(x, y)) d_x(x, y)^2 + h'(d(x, y)) d_{xx}(x, y)$$

$$g_{xy}(x, y) = h''(d(x, y)) d_x(x, y) d_y(x, y) + h'(d(x, y)) d_{xy}(x, y)$$

$$g_{yy}(x, y) = h''(d(x, y)) d_y(x, y)^2 + h'(d(x, y)) d_{yy}(x, y)$$

mit

$$d_x(x, y) = \frac{x}{d(x, y)}$$

$$d_y(x, y) = \frac{y}{d(x, y)}$$

$$d_{xx}(x, y) = \frac{y^2}{d(x, y)^3}$$

$$d_{xy}(x, y) = -\frac{xy}{d(x, y)^3}$$

$$d_{yy}(x, y) = \frac{x^2}{d(x, y)^3}$$

und

$$h'(\rho) = \frac{R - \rho}{h(\rho)}$$
$$h''(\rho) = -\frac{r^2}{h(\rho)^3}$$

An der Stelle  $(R, 0)$ :

$$d(R, 0) = R$$
$$d_x(R, 0) = 1$$
$$d_y(R, 0) = 0$$
$$d_{xx}(R, 0) = d_{xy}(R, 0) = 0$$
$$d_{yy}(R, 0) = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

und

$$h(d(R, 0)) = h(R) = r$$
$$h'(R) = 0$$
$$h''(R) = -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r}$$

Es folgt

$$g(R, 0) = h(d(R, 0)) = r$$
$$g_x(R, 0) = h'(R) d_x(R, 0) = 0$$
$$g_y(R, 0) = h'(R) d_y(R, 0) = 0$$
$$g_{xx}(R, 0) = -\frac{1}{r} \cdot 1^2 + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{r}$$
$$g_{xy}(x, y) = -\frac{1}{r} \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$
$$g_{yy}(x, y) = -\frac{1}{r} \cdot 0^2 + 0 \cdot \frac{1}{R} = 0$$

Die Taylor-Entwicklung ist dann

$$g(x, y) = r - \frac{1}{2r}(x - R)^2 + O(\|(x - R, y)\|^3)$$