Aufgabe 45: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = x\,y\,(x+y-3)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von f.

c) Klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f nach Minima, Maxima oder Sattelpunkten.

LÖSUNG: a) $f(x,y) = x\,y\,(x+y-3) = 0$ falls $x = 0$ oder falls $y = 0$ oder falls $y = 3-x$.

b) Berechne

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y(x+y-3)+xy \\ x(x+y-3)+xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(y+2x-3) \\ x(x+2y-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+2xy-3y \\ x^2+2xy-3x \end{pmatrix}$$

Dann folgt aus $\nabla f(x,y) = 0$:

- $x = 0$ und $y = 0$
- $x = 0$ und $y \neq 0$, d.h. $0 = y+2x-3 = y-3$, also $y = 3$
- $y = 0$ und $x \neq 0$, d.h. $0 = x+2y-3 = x-3$, also $x = 3$
- $y \neq 0$ und $x \neq 0$, d.h. $0 = y+2x-3 = y-3$ und $0 = x+2y-3 = x-3$, also $x = 1$ und $y = 1$

c) Berechne

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2y+2x-3 \\ 2y+2x-3 & 2x \end{pmatrix}$$

Also

$$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess} f(0,3) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess} f(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \to \text{ indefinit } \to \text{ Sattelpunkt}$$

$$\mathrm{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \text{ pos. definit } \to \text{ Minimum}$$

Aufgabe 46: Sei

$$f(x_1,x_2) = x_2\,\ln(x_1+1)\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

b) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) der Funktion f aus Teil a) um den Punkt $(x_1,x_2) = (0,0)$.

Lösung: a)

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_1+1} \\ \ln(x_1+1) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Hess} f = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1x_1} f & \partial^2_{x_1x_2} f \\ \partial^2_{x_2x_1} f & \partial^2_{x_2x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{(x_1+1)^2} & \frac{1}{x_1+1} \\ \frac{1}{x_1+1} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Nach a) gilt

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$f(\xi) = 0 + 0 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) = \xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3).$$

Aufgabe 47: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= y^2 + z^2 - 4 = 0, \\ g(x,y,z) &:= x + y - 1 = 0, \\ \mathbf{f}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig und geben Sie den Tangentialraum an.
Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Lösung: $h(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt einen Kreiszylinder, dessen Grundfläche durch einen Kreis mit Radius 2 (Mittelpunkt auf der x-Achse) dargestellt wird. $g(x,y,z) = x + y - 1 = 0$ beschreibt die affine Ebene $x + y = 1$, jeder Punkt p in dieser Ebene hat eine Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für gewisse } r,s \in \mathbb{R}.$$

Folglich beschreibt

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

die Schnittmenge $\mathcal{M}$ beider Figuren, es ist eine Ellipse in der affinen Ebene. Diese kann lokal mit den Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ wie folgt parametrisiert werden:

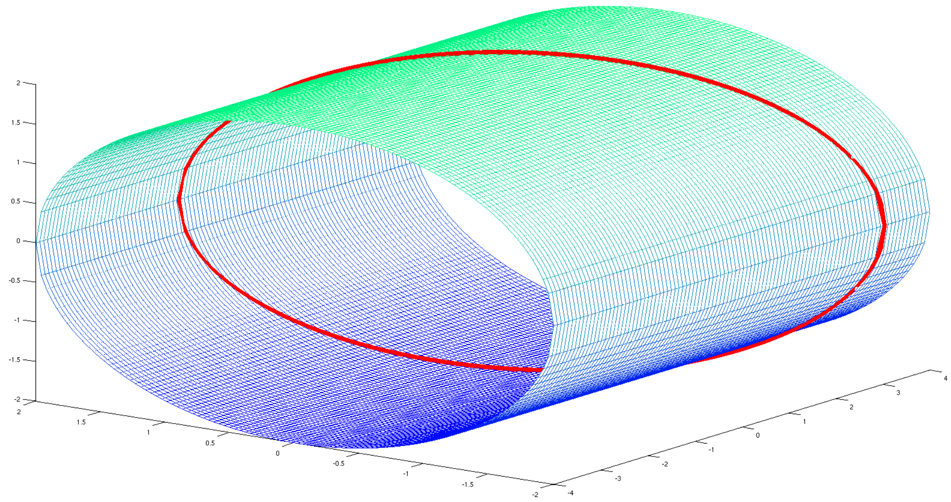
$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ \sqrt{4-t^2} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -\sqrt{4-t^2} \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierungen ergeben sich, indem man in Abhängigkeit von y die Koordinaten x und z aus (1) bestimmt. Der Tangentialraum kann aus den Gradienten (der Rang der Matrix $(\nabla h\ \nabla g)$ ist für alle Punkt in $\mathcal{M}$ 2!)

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Vektorprodukts wie folgt berechnet werden:

$$T_{(x,y,z)}\mathcal{M} = \operatorname{span}\{\nabla h \times \nabla g\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -z \\ z \\ -y \end{pmatrix}\right\}.$$



Aufgabe 48: a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x,y,z) := \frac{mG}{||x-a||} = \frac{mG}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}}$$

eines Punktes $a \in \mathbb{R}^3$ der Masse $m > 0$. Die positive Konstante G mit dem Wert $G = (6672 \pm 4)10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathcal{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von U für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^3$ $(a \neq b)$ der Massen $m_1 = m_2 = m > 0$ lautet

$$V(x) = V(x,y,z) := \frac{m_1 G}{||x-a||} + \frac{m_2 G}{||x-b||}$$

Sind die Niveauflächen $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$ von V wiederum für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} U(x) = c &\Leftrightarrow \|x-a\| = \frac{mG}{c} =: R \\ &\Leftrightarrow \|x-a\|^2 = R^2 \end{aligned}$$

Dies sind Kugeloberflächen vom Radius $R = \frac{mG}{c} > 0$ und Mittelpunkt $M = a \in \mathbb{R}^3$.

Wegen

$$\nabla U(x) = -mG \frac{x-a}{\|x-a\|^3} \text{ für } x \neq a$$

gilt $\nabla U(x) \neq 0$ für alle $c > 0$. Der Satz über implizite Funktionen besagt daher, dass es sich bei $\mathcal{F}_c$ um eine zweidimensionale Flächen handelt.

Bemerkung: Der Satz über implizite Funktionen wäre/ist hier nicht absolut nötig, da man die Auflösungen explizit (s. oben) vornehmen kann und damit auch explizit Tangentialvektoren ausrechnen kann!

b) Zuerst zeigen wir, daß diese Menge nicht leer ist. Da $m_1 = m_2 = m$ gilt

$$V(x) = mG\left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}\right)$$

und

$$\begin{aligned} V(x) &\to 0 \text{ für } \|x\| \to \infty \\ V(x) &\to +\infty \text{ für } x \to a, b. \end{aligned}$$

Also gibt es für alle $c > 0$ Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, die in der Niveaumenge

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, V(x) = c\}$$

liegen. Sei

$$\begin{aligned} g(x) &:= \frac{m_1 G}{\|x-a\|} + \frac{m_2 G}{\|x-b\|} - c \\ &= mG\left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}\right) - c \end{aligned}$$

die Funktion, die die Niveaumenge $V(x) = c$ als Null-Niveaumenge beschreibt.

$$\nabla g(x) = -mG\left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} + \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3}\right)$$

Die Niveaumenge ist keine Fläche, falls

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &-\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} - \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3} = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{a-x}{\|x-a\|^3} = \frac{x-b}{\|x-b\|^3} \end{aligned}$$

Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &a - x = x - b \\ \Leftrightarrow &x = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Solche Punkte gehören zu der Niveauflächen $V(x) = c_0$ wobei

$$c_0 = \frac{mG}{\|\frac{b-a}{2}\|} + \frac{mG}{\|\frac{a-b}{2}\|} = \frac{4mG}{\|a-b\|}$$

Somit sind alle Niveaumengen

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, V(x) = c\}$$

mit $c \neq c_0$ Flächen. F_{c_0} ist hingegen keine Fläche.

Bemerkung:
Aus den Vorüberlegungen zu Beginn dieses Aufgabenteiles, weil ∇g nur an einer Stelle Null ist, und weil die Niveaumengen sich nicht schneiden, kann man sagen, dass:

- Für $c < c_0$ ist die Niveaumenge $V(x) = c$ ist eine Hyperfäche in $\mathbb{R}^3$, das heißt eine geschlossene 2D Fläche;
- Für $c = c_0$ hat die Niveaumenge $V(x) = c$ einen singulären Punkt (Siehe Abbildung 1)
- Für $c > c_0$ besteht die Niveaumenge $V(x) = c$ aus zwei Hyperfächen in $\mathbb{R}^3$, das heißt zwei geschlossene 2D Flächen.

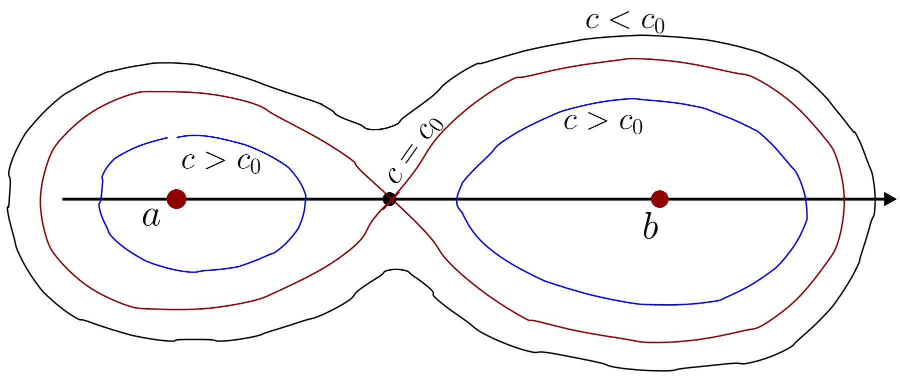


Abbildung 1: Skizze der Niveaufächen in 2D