Aufgabe 49: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen $x_Z \in Z$, so dass der Abstand zwischen x_Z und x_0 minimal ist.

Aufgabe 50: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 51:

a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y, z) := x^2y^2z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

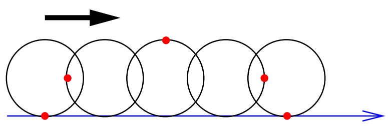
zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{abc}$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b+c}{3}$, welche für alle nichtnegativen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{3}$ falls $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Setzen Sie $x^2 = \frac{a}{a+b+c}$, $y^2 = \frac{b}{a+b+c}$, $z^2 = \frac{c}{a+b+c}$.

Aufgabe 52: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$