Aufgabe 49: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen $x_Z \in Z$, so dass der Abstand zwischen x_Z und x_0 minimal ist.

LÖSUNG: Wir müssen die Funktion

$$f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

minimieren. Dazu bilden wir die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - \lambda(x^2+y^2-1). \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_x F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2(x-x_0) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y-y_0) - 2\lambda y = 0 \\ 2(z-z_0) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Daraus folgt $z = z_0$,

$$x = \frac{x_0}{1-\lambda} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{y_0}{1-\lambda}.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt

$$\begin{aligned} && \frac{x_0^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{y_0^2}{(1-\lambda)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow && x_0^2 + y_0^2 &= (1-\lambda)^2 \\ \Leftrightarrow && \lambda &= 1 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

und damit können wir nun x und y ausrechnen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{1-\lambda} = \frac{x_0}{\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ y &= \frac{y_0}{1-\lambda} = \frac{y_0}{\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, z_0\right) &= \frac{x_0^2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} + \frac{y_0^2(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} \\ &= \left(1+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, z_0\right) = \frac{x_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2} + \frac{y_0^2(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2}{x_0^2+y_0^2}$$
$$= \left(1-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x_Z = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 50: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

LÖSUNG: Minimieren Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2$$
$$= (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

f ist das Quadrat des Abstandes!
Zur Lösung bilden wir die Lagrangesche Funktion

$$F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

und wenden den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen an.

$$\begin{aligned}
\partial_x F &=: F_x = f_x - \lambda g_x = 2(x-1) - 2\lambda x = 0\,, \\
\partial_y F &=: F_y = f_y - \lambda g_y = 2(y+1) - 2\lambda y = 0\,, \\
\partial_z F &=: F_z = f_z - \lambda g_z = 2z + 2\lambda z = 0\,, \\
\partial_\lambda F &= F_\lambda = -g = 0\,.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y(1-\lambda) = -1 \\ 2x(1-\lambda) - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(1-\lambda) = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 1 - \lambda = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = -y} \quad (\lambda \neq 1\,!)$$

und ($\boxed{z = 0}$ oder $\boxed{\lambda = -1}$).

Fall 1: $x = -y$ und $z = 0$:

$$\Rightarrow\ 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} \\
&= (\sqrt{2}-1)^2\,. \\
f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 \\
&= \frac{2(2+\sqrt{2})^2}{4} = (1+\sqrt{2})^2\,.
\end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda = -1 \ \Rightarrow\ 1 - \lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} 4y + 2 = 0 \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{2}\,, \\ 4x - 2 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\,. \end{cases} \\
&\Rightarrow 0 = g\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\,, \quad \text{keine Lösung!}
\end{aligned}$$

Der minimale Wert ist also: $(\sqrt{2}-1)^2 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
Beachte: Die Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2$ ist stetig und für jedes feste $z_0 \in \mathbb{R}$ ist $M_{z_0} = \{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z_0^2\}$ ein(e) Kreis(linie) mit Mittelpunkt $M = (0,0,z_0)$ und Radius $R = \sqrt{1+z_0^2}$, also abgeschlossen und beschränkt. Daher besitzt f in M_{z_0} sowohl Minimum als auch Maximum.
Bemerkung: Am obigen Gleichungssystem erkennt man, dass der Verbindungsvektor $(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ parallel zu $\operatorname{grad} g(x,y,z)$ liegt.

Aufgabe 51: a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) := x^2y^2z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$$

zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{abc}$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b+c}{3}$, welche für alle nichtnegativen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{1}{3}$ falls $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Setzen Sie $x^2 = \frac{a}{a+b+c}$, $y^2 = \frac{b}{a+b+c}$, $z^2 = \frac{c}{a+b+c}$.

Lösung:

a) Auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nimmt die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$$

einen größten Wert an, da f stetig ist und die Kugeloberfläche beschränkt und abgeschlossen ist.

Nach dem Satz über Extrema unter Nebenbedingungen bilden wir:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2y^2z^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

und erhalten durch Ableiten:

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_x F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \partial_z F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2xy^2z^2-2\lambda x=0 \\ 2x^2yz^2-2\lambda y=0 \\ 2x^2y^2z-2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x(y^2z^2-\lambda)=0 \\ 2y(x^2z^2-\lambda)=0 \\ 2z(x^2y^2-\lambda)=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{array}\right\}.$$

Die Lösungen mit $x=y=z=0$ können wir ausschließen, da $f(0,0,0)=0$ offenbar der kleinste Wert von f überhaupt ist und $(0,0,0)$ nicht auf der Kugeloberfläche liegt. Die anderen (möglichen) Lösungen ergeben:

$$\begin{aligned} &\lambda = y^2z^2 = x^2z^2 = x^2y^2 \\ \Rightarrow &x^2=y^2=z^2 \text{ und } \lambda = x^4=y^4=z^4\,. \\ \Rightarrow &x^2=y^2=z^2=\frac{1}{3}\,, \quad \text{wegen der Nebenbedingung } x^2+y^2+z^2=1\,. \\ \Rightarrow &\lambda = x^4 = \frac{1}{9} \text{ und} \\ &x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,. \\ \Rightarrow &f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}>0\,. \end{aligned}$$

Dies liefert den maximalen Wert von f unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2=1$, da f seinen größten Wert auf der Kugel annimmt und in allen in Frage kommenden Punkten denselben Wert – nämlich $\frac{1}{27}$ – hat.

b) Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, dass für Punkte auf der Kugeloberfläche der Einheitskugel gilt

$$f(x,y,z) \le \frac{1}{27} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2y^2z^2 \le \frac{1}{27}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2+z^2=1$.
Setze nun

$$x^2=\frac{a}{a+b+c}\ge 0\,,\ y^2=\frac{b}{a+b+c}\ge 0\,,\ z^2=\frac{c}{a+b+c}\ge 0\,,$$

dann folgt daraus

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Die so gewählten x, y und z erfüllen also unsere Nebenbedingung. Somit können wir sie einsetzen in

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{3}$$

und erhalten

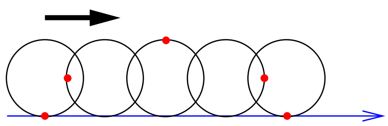
$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+c)^3}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c \geq 0$ und $a + b + c > 0$.

Aufgabe 52: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

LÖSUNG:

a) Sei G der Mittelpunkt dieses Kreises und $G(t) = G_0 + vt = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Parametrisierung der Bewegung von G, wobei t die Zeit ist.

P rotiert um G und daraus kann man $X - G$ als $X - G = \begin{pmatrix} -r\sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ parametrisieren, dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, die sich als $\omega = \frac{1}{r}$ ergibt. Dies wird anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass bei gleicher Geschwindigkeit ein halb so großer Kreis doppelt so oft rotiert.

Damit schließen wir, dass die Parametrisierung von X sich schreiben lässt als

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin(\frac{1}{r}t) \\ -r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\sin(\frac{1}{r}t) \\ r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix}.$$

b) Der Punkt P berührt immer dann die x-Achse, wenn die y-Komponente von

$X(t)$ gleich Null ist, das heißt wenn

$$\begin{aligned}
& r - r\cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{r}t = 2\pi j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0 \\
\Leftrightarrow \quad & t = 2\pi r j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 0$ berührt der Punkt P die x-Achse also zum ersten Mal und die zweite Berührung findet zur Zeit $t = 2\pi r$ statt.

c) Die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P von der ersten bis zur zweiten Berührung mit der x-Achse bewegt hat, berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
s(2\pi r) &= \int_0^{2\pi r} \|\dot{X}(\xi)\| \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{r}\xi\right) \end{pmatrix} \right\| d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(\left(1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{1}{r}\xi\right) \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(2 - 2\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\right)} \, d\xi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi r} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)} \, d\xi.
\end{aligned}$$

Da $\sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \geq 0$ für $\xi \in [0, 2\pi r]$ gilt

$$\begin{aligned}
s(2\pi r) &= 2 \int_0^{2\pi r} \sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) d\xi \\
&= -4r\cos\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\Bigg|_0^{2\pi r} \\
&= -4r\,(-1 - 1) \\
&= 8r.
\end{aligned}$$