



# Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2017/18  
Prof. Dr. Ira Neitzel  
AR. Dr. Tino Ullrich



## Übungsblatt 13.

Abgabe am **22.01.2018** vor der Vorlesung.

### Aufgabe 1. (Netzwerke und Definitionen)

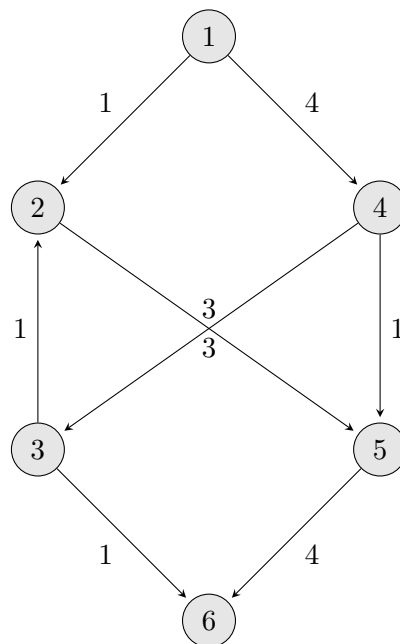


Abbildung 1: Ein Flussnetzwerk

- a. Eine Flussmatrix kodiert den Fluss zwischen zwei verbundenen Knoten im Netzwerk (einfacher Graph). Ähnlich einer Adjazenzmatrix, enthält der entsprechende Eintrag den Wert des Flusses, wenn eine Kante vorhanden ist und ansonsten den Wert 0. Ist folgende Matrix  $F$  eine gültige Flussmatrix für obigen Netzwergraph?

$$F := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Geben Sie die Flussmatrix für einen Maximalfluss von 1 nach 6 an. Berechnen Sie diesen mittels Ford-Fulkerson bzw. Edmonds-Karp.
- c. Geben Sie einen Schnitt minimaler Kapazität an.

(2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Komplexität von Ford-Fulkerson)

Zeigen Sie, dass für  $U \in \mathbb{N}$  der Ford-Fulkerson Algorithmus für das untenstehende Netzwerk  $2U$  Iterationen benötigt, wenn immer über Wege mit 3 Kanten augmentiert wird.

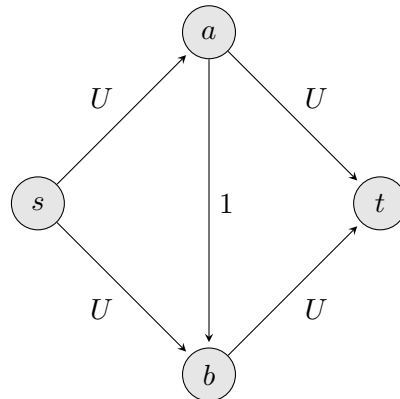


Abbildung 2: Netzwerk

Wieviele Iterationen benötigt der Edmonds-Karp Algorithmus?

(3 + 1 Punkte)

**Aufgabe 3.** (Bipartites Matching)

- a. Es sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph und  $N_G$  das zugehörige Netzwerk. Zeigen Sie, dass dann gilt
  - (a) Zu jeder Paarung  $M$  gibt es eine 0 – 1-Flussfunktion  $f_M$  für  $N_G$ , der ein  $s - t$ -Fluss ist, mit  $\text{flow}(f_M) = |M|$ .
  - (b) Zu jeder 0 – 1-Flussfunktion  $f$  für  $N_G$ , für die die Flussbedingung gilt ( $f$  ist also auch ein  $s - t$ -Fluss), gibt es eine Paarung  $M_f$  mit  $\text{flow}(f) = |M_f|$ .
- b. Der untenstehende Graph zeigt, welche der Aufgaben 1–4 von welcher Person  $a$ – $d$  bearbeitet werden kann. Finden Sie das größtmögliche bipartite Matching für diesen Graph, indem Sie den Graph in ein Netzwerk transformieren und dann den

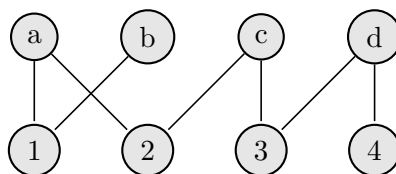


Abbildung 3: Zuordnung Personen-Aufgaben

maximalen Fluss mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus bestimmen.

**Bemerkung:** Lösungen, die nicht den maximalen Fluss verwenden, werden nicht gewertet!

(5 + 4 = 9 Punkte)

**Aufgabe 4.** Auf der Webseite finden Sie einen Link zur aktuellen Tabelle der UEFA Championsleague. Die Gruppenphase ist beendet und die Achtelfinalbegegnungen stehen an. Diese werden nach folgenden Regeln ausgelost.

- Es gibt 8 Gruppen.
- In jeder Gruppe steht der Gruppenerste und der Gruppenzweite fest (siehe Link).
- Gruppenerste spielen gegen Gruppenzweite einer anderen Gruppe und aus einem anderen Land (beispielsweise spielt Real Madrid niemals gegen Barcelona im CL-Achtelfinale).

Geben Sie den zugehörigen Graph an und finden Sie mögliche Achtelfinalbegegnungen.  
(5 Zusatz- Punkte)