Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

universitätbonn

Letztes Übungsblatt.

Abgabe am **29.01.2018 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (LR-Zerlegung)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

a. Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Geben Sie L und R explizit an.

b. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung.

($3 + 2 = 5$ Punkte)

Aufgabe 2. (Cholesky–Zerlegung)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definit*, falls

$$\langle x, Ax\rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$$

gilt, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ hier das *Standardskalarprodukt* $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$ bezeichnet. Für eine symmetrische, positiv definite (oft abgekürzt: SPD) Matrix kann man stets die Cholesky–Zerlegung bestimmen. Wir betrachten folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 17 & 18 \\ -4 & 4 & 18 & 57 \end{pmatrix}.$$

a. Überprüfen Sie mit Hilfe des Determinantenkriteriums für die führenden Hauptminoren, ob die Matrix A positiv definit ist. **Hinweis:** Die n führenden Hauptminoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die Matrizen

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad , \quad k = 1, ..., n\,.$$

Eine Matrix ist positiv definit, wenn alle Determinanten der Hauptminoren positiv sind.

b. Berechnen Sie ggf. die Cholesky-Zerlegung $A = GG^T$.

c. Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (14, 20, -7, 66)^T$.

($2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)

Aufgabe 3. (Induzierte Matrixnorm)

Zeigen Sie, dass die Zeilenbetragssummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

von der Maximumsnorm

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,m} |x_i|$$

induziert wird.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Matrixnormen und Kondition)

Wir betrachten eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ im $\mathbb{R}^n$ und die zugehörige induzierte Matrixnorm. Sei A eine reguläre Matrix und $\tilde{A} = A + \Delta A$ so gewählt, dass

$$\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1\,.$$

a. Zeigen Sie, dass dann $\tilde{A}$ invertierbar ist.

b. Wir betrachten jetzt das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = b$ mit gestörter Matrix $\tilde{A}$. Zeigen Sie, dass dann die Formel

$$\|\Delta x\|/\|x\| \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \frac{\kappa(A)}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$

gilt. **Hinweis:** Man nutze, dass eine Matrix B injektiv ist, falls es ein $c > 0$ gibt, so dass $\|Bx\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Warum ist das so?

$(1 + 3 = 4$ Punkte)

Aufgabe 5. (Gauß-Elimination)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & k & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Für welche k ist das Gaußsche Eliminationsverfahren (GEV) mit diagonaler Pivotwahl (also ohne Pivotisierung) durchführbar? Für welche k ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, lösbar oder nicht lösbar? Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{R}$ die Lösungen mithilfe des GEV, falls welche existieren.

(6 Zusatz- Punkte)